多元微分学（第六章）复习指导

—兼谈数学概念与技能的复习方法

数学知识的组成

- 基本概念
- 基本理论
- 基本技能
  - 证明
  - 运算
  - 应用

一、关于基本概念的复习

- 本章主要概念
  - ●二元函数
  - ●二重极限
  - ●连续
  - ●偏导数
  - ●全微分
  - ●方向导数
  - ●梯度
  - ●场

复习注意点之一

切实弄清每个概念：

它的定义、记号及实际意义

如偏导数

- 定义？
- 记号？
- 几何解释？
- 物理意义？

复习注意点之二

从概念的相互联系和比较加深理解

发展脉络

二元函数→二重极限 → 连续性

二元函数→二重极限 → 偏导数 → 方向导数 → 梯度

二元函数→二重极限 → 全微分

相互联系

连续

$\cancel{\Uparrow}$ $\cancel{\Downarrow}$

存在连续偏导数 $\Longrightarrow$ 可微 $\Longrightarrow$ 可偏导

$\Uparrow$ $\cancel{\Downarrow}$

存在各方向的方向导数

与一元函数相关概念的比较（特别注意“异”）

二重极限 VS 一元极限

偏 导 数 VS 一元导数

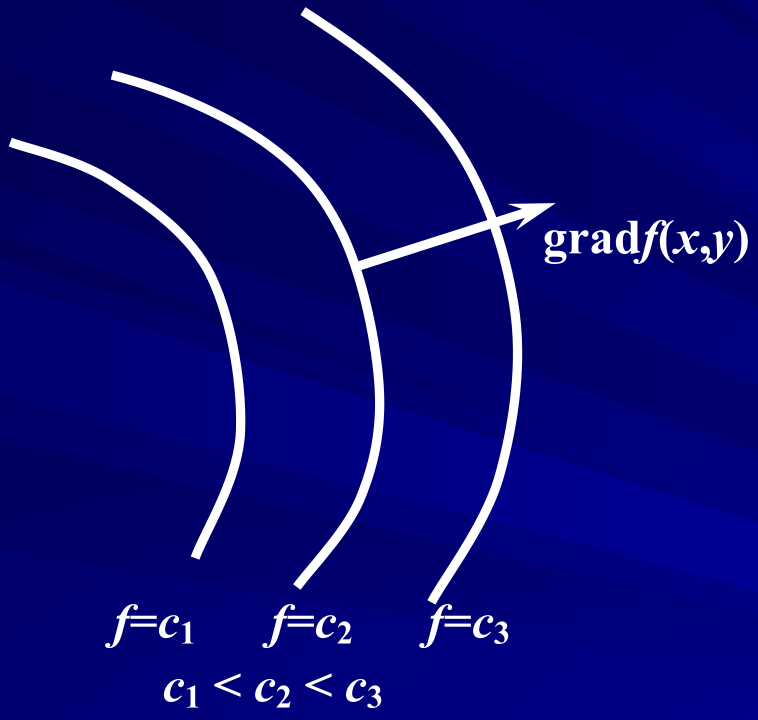
全 微 分 VS 一元微分

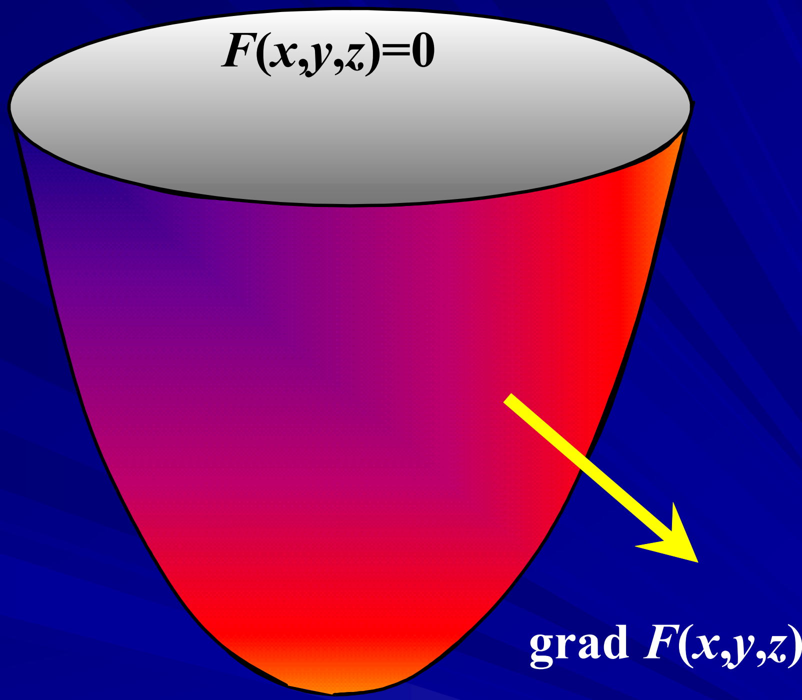
复习注意点之三

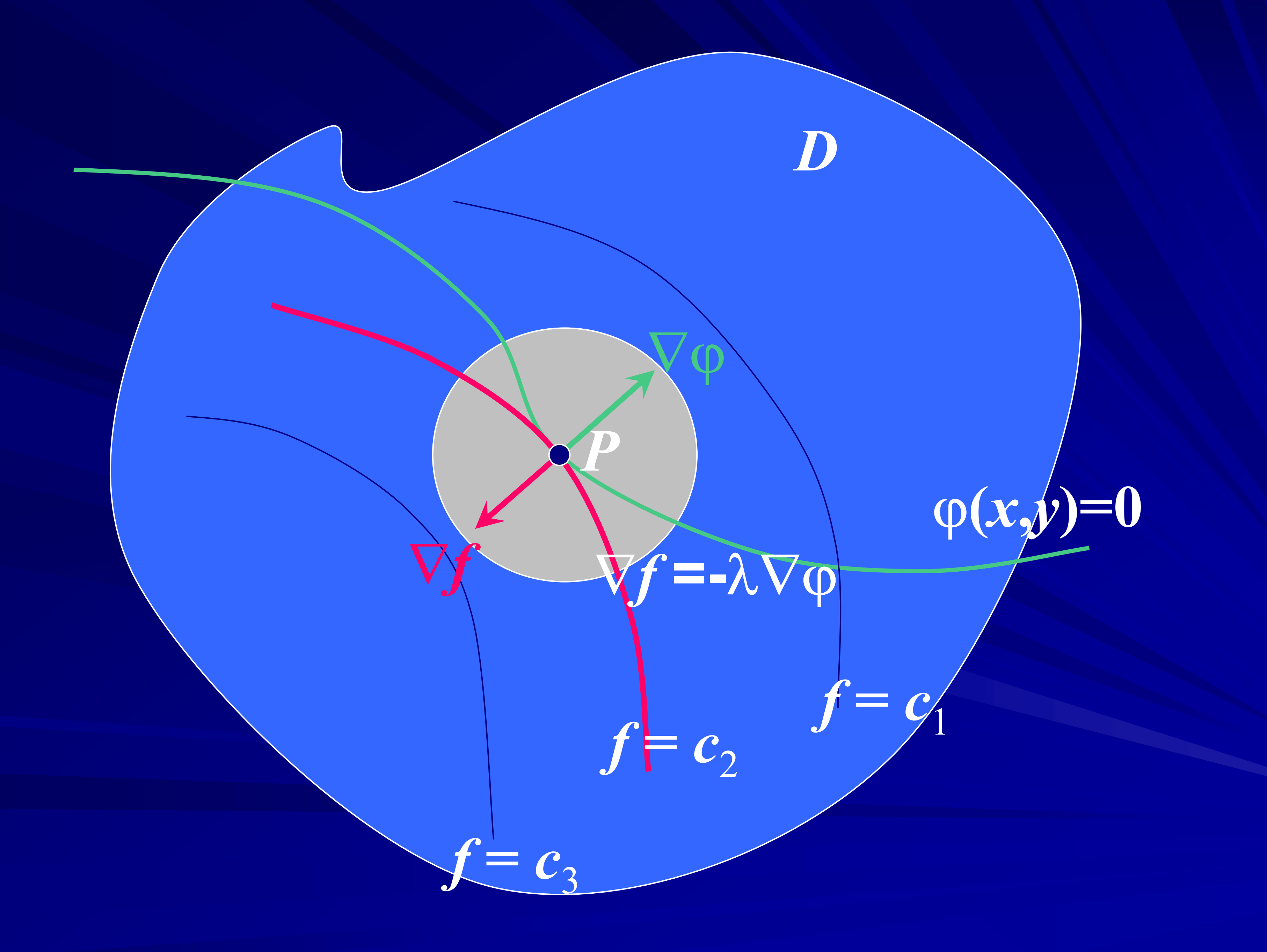
注意发掘并多角度掌握概念的内涵

Ex．梯度grad $f(x,y)$：一个内涵丰富的数学和物理概念，有着广泛的实际应用：

- 梯度与方向导数；
- 梯度与等量面、等量线；
- 梯度与曲面（曲线）的法向量；
- 梯度与极值；
- 梯度与Lagrange乘子法.


grad$f(x,y)$
$f=c_1$ $f=c_2$ $f=c_3$
$c_1 < c_2 < c_3$


$F(x,y,z)=0$
grad $F(x,y,z)$



D
∇φ
P
φ(x,y)=0
∇f
∇f =-λ∇φ
f = c1
f = c2
f = c3

二、基本理论

本章主要定理、重要结论

1. 有界闭区域上连续函数的性质;
2. 混合偏导与求导次序无关的充分条件;
3. 全微分存在的必要条件和充分条件;
4. 隐函数存在定理和求导公式;
5. 极值点的条件以及条件极值的Lagrange乘子法.

复习注意点

- 弄清
  - 解决什么问题（问题的提法）？
  - 条件是什么？
  - 结论是什么？

Ex. 隐函数存在定理

- 提法

给定$F(x,y)=0$，不经显化，判断方程是否能确定隐函数？隐函数有何性质？

- 出发点

从二元函数$F(x,y)$的性质出发，回答上述问题；又由$F(x,y)$的表达式给出隐函数导数的表达式.

三、基本运算

1. 求二重极限
2. 求偏导数
3. 复合函数求导
4. 隐函数求导
5. 求全微分
6. 求方向导数与梯度

复习注意点之一

抓住重点与难点，多做习题，反复练习。

1. 求二重极限
2. 求偏导数
3. 复合函数求导
4. 隐函数求导
5. 求全微分
6. 求方向导数与梯度

以上运算中，2、3两项是重点和难点。

复习注意点之二

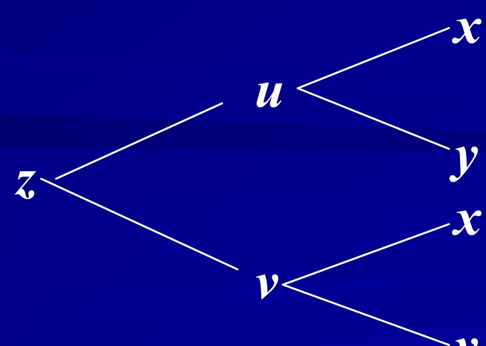
牢记基本公式，熟悉基本题型，掌握必要工具

Ex. 复合函数求偏导

1. 基本格式：$z=f(u,\ v)$ ，$u=\varphi(x,\ y)$ ，$v=\psi(x,\ y)$ ，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}\ .$$

2. 用树图表示函数复合关系；



3. 重点注意的题型

①抽象函数与具体函数混合型：

如 $f\left(x+y,\ x+\dfrac{x}{y}\right)$ etc.

②显函数与隐函数混合型：

如 $w=f(u,x)$，

其中 u 是由 $f(u,x)=0$ 确定的 x 的隐函数.

③复合函数二阶偏导数.

复习注意点之三

抓一题多解，抓常犯错误

Ex.（习题6-5第7题）：几种解法的比较.

设$y=f(x,t)$，而t是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的x,y的函数，设f,F都是$C^{(1)}$类函数，证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_x F_t - f_t F_x}{f_t F_y + F_t}$$

解一：函数代入法；
解二：求全微分法；
解三：解方程组法.

常犯错误因人而异，要自己总结，避免反复出现.

例如：1. 求二阶偏导时，忽略了f'_1、f'_2等仍保持中间变量与自变量之间原来的复合关系；

2. 隐函数求导时，不清楚“用公式”与“直接求”之间的区别；

3. 求一点处的偏导（或全导数）时，代入自变量和中间变量的值时发生错误；

4. 记号使用方面的错误，etc.

四、基本应用

1. 几何应用
   - 空间曲线的切线和法平面
     - 参数方程情形
     - 一般方程情形
   - 曲面的切平面与法线
     - 隐式方程$F(x,y,z)=0$情形
     - 显式方程$z=f(x,y)$情形
     - 参数方程情形 *
2. 多元函数极值、最值、条件极值的求法与应用

复习注意点

1. 注意数学概念的几何意义与物理背景；
2. 注意学习如何把实际问题归结为数学问题.

Ex. 某小山底部为xOy面上的

$$D=\{\ (x,y)\ |\ x^2+y^2-xy\le 75\ \},$$

高度函数为$h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$，试在山脚处找一上山坡度最大的点作为登山起点。