高等数学（上）期中考试试卷 1

（答卷时间为 120 分钟）

一. 选择题（每小题 4 分）

1.以下条件中（　　　）不是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分条件.

（A） $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x_0)$　　（B） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

（C） $f'(x_0)$ 存在　　（D） $f(x)$ 在 x_0 可微

2.以下条件中（　　　）是函数 $f(x)$ 在 x_0 处有导数的必要且充分条件.

（A） $f(x)$ 在 x_0 处连续　　（B） $f(x)$ 在 x_0 处可微分

（C） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在　　（D） $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在

3. $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sin \pi x}$ 的（　　　）间断点.

（A）可去　　（B）跳跃　　（C）无穷　　（D）振荡

4.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续并在开区间 (a,b) 内可导，如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么必有（　　　）.

（A）在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$　　（B）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 单调增加

（C）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 单调减少　　（D）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 是凸的

5. 设函数

$f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$，则方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内根的个数为（　　）.

（A）0 个　　（B）至多 1 个　　（C） 2 个　　（D） 至少 3 个

二. 求下列极限（每题 5 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^b(1+ax)}{\sin ax}$（$a>0$）.　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b\sin x}{cx+d\cos x}$（$c\neq 0$）.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{a}{x}}-1\right)x$（$a\neq 0$）.　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

三. 求下列函数的导数（每题 6 分）

1. $y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)-\cos x\ln(\tan x)$,求 y'.

2.设 $F(x)$ 是可导的单调函数，满足 $F'(x)\neq 0$， $F(0)=0$.方程

$$F(xy)=F(x)+F(y)$$

确定了隐函数 $y=y(x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

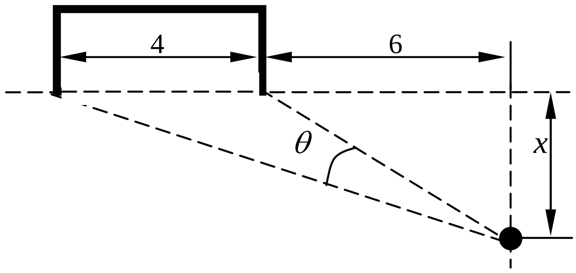
3.设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4.设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+e) & x>0\\ a^x & x\le 0\end{cases}$（$a>0$），问 a 取何值时 $f'(0)$ 存在？.

四.（8 分）证明：当 $x>0$ 时有 $e^x\ge x^e$，且仅当 $x=e$ 时成立等式.

五.（8 分）假定足球门宽度为 4 米，在距离右门柱 6 米处一球员沿垂直于底线的方向带

球前进，问：他在离底线几米的地方将获得最大的射门张角？



六.（10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 内有二阶导数.如果 $f(a)=f(b)$ 且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>f(a)$，证明在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)<0$.

七.（10 分）已知函数 $y=f(x)$ 为一指数函数与一幂函数之积，满足：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$；

（2） $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的图形只有一条水平切线与一个拐点.

试写出 $f(x)$ 的表达式.

高等数学（上）期中考试试卷 2

（答卷时间为 120 分钟）

一. 填空题（每小题 4 分）

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\sin x)^{1/x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$ _______.

2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 的_______间断点.（可去.跳跃.无穷.振荡）

3.若 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(x_0-3\varepsilon)-f(x_0)}{2\varepsilon}=$ ________.

4. 函数 $f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内的驻点的个数为（　　）.

（A）0 个　　（B）至多 1 个　　（C） 2 个　　（D） 至少 3 个

5.设 $a>0$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+dx=e$，则 a 与 d 的关系是_________.

二. 计算题（每题 6 分）

1.求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

2.求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

3. $y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)-\cos x\ln(\tan x)$,求 y'.

4.设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

5.求 $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

6.求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

三.（8 分）证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x+\tan x>2x$.

四.（8 分）设函数 $f(x)$ 有二阶导数，且 $f(0)=0$，又满足方程 $f'(x)+f(x)=x$，证明 $f(0)$ 是极值，并说出它是极大值还是极小值？

五.（8 分）设 a 和 b 是任意两个满足 $ab=1$ 的正数，试求 a^m+b^n 的最小值（其中常数 m、$n>0$）

六.（10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[\,0\,,1\,]$ 上可导，且 $0<f(x)<1$，证明 $\exists\xi\in(\,0\,,1\,)$，使得 $f(\xi)=\xi$；又若 $f'(x)\neq 1$（$x\in(\,0\,,1\,)$），证明这样的 ξ 是唯一的.

七.（10 分）（1）设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是单调增加的正数列，在什么条件下，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$？

（2）对上述数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，令 $x_n=\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)^{\frac{1}{n}}$，试用夹逼准则证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

高等数学（上）期末考试试卷 1

（答卷时间为 120 分钟）

一.填空题（每题 4 分）

1.函数 $f(x)$ 在$[\ a\ ,b\ ]$上有界是 $f(x)$ 在$[\ a\ ,b\ ]$上可积的__________条件，函数 $f(x)$ 在$[\ a\ ,b\ ]$上连续是 $f(x)$ 在$[\ a\ ,b\ ]$上可积的__________条件.

2.函数 $y=\dfrac{1}{1+\tan x}$ 的间断点为 $x=$__________，它是________间断点.

3.当 $x\to 0$ 时，把以下的无穷小：

（A）$a^x-1\quad (a>0,a\neq 1)$；　　（B）$x-\sin x$；

（C）$1-\cos 4x$；　　（D）$\ln(1+\sqrt{x})$

按 x 的低阶至高阶重新排列是_____，______，______，______.（以字母表示）

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]=\int_0^1$__________$dx=$_________.

5.设函数 $f(x)$ 在闭区间$[\ 0\ ,1\ ]$上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则存在 $x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)+f(1-x_0)=0$. 证法如下：

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_{1-x}^1 f(t)dt$，$x\in[0,1]$，则 $F(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间 $(0,1)$ 内________，且 $F(0)=$_____，$F(1)=$_____，故根据微分学中的_________定理知，$x_0\in(0,1)$ 使得 $F'(x_0)=f(x_0)+f(1-x_0)=0$，证毕.

二.计算题（每题 6 分）

1.若 $\lim\limits_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{c|x|}}=e^2$，求 c 的值.

2.设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+y=\sin(xy)$ 确定的隐函数，求 y'.

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left(e^{t^2}-1\right)dt}{\ln(1+x^6)}$.

4.求 $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

5.求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\cos^4 x)dx$.

6.求 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

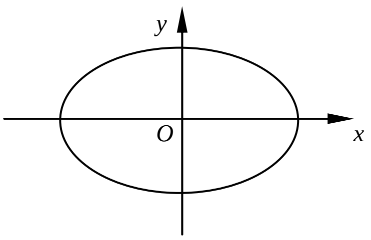
三.（8 分）设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

四.（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间$[\ 0\ ,1\ ]$上连续，且 $f(x)<1$，证明方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在开区间 $(0,1\ )$ 内有且仅有一个根.

五.（8 分）求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转而成的立体的体积.

六.（8 分）设半圆形材料的方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，其线密度为 $\rho=k-y$，$(k>R)$ 求该材料的质量.

七.（12 分）在一高为 4 的椭圆底柱形容器内储存某种液体，并将容器水平放置，如果椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$（单位：m），问：



（1）液面在 $y(-1\le y\le 1)$ 时，容器内液体的体积 V 与 y 的函数关系是什么？

（2）如果容器内储满了液体后以每分钟 $0.16\mathrm{m}^3$ 的速度将液体从容器顶端抽出，当液面在 $y=0$ 时，液面下降的速度是每分钟多少 m？

（3）如果液体的比重为 1（N/m^3），抽完全部液体需作多少功？

高等数学（上）期末考试试卷 2

（答卷时间为 120 分钟）

一. 填空题（每小题 4 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的________条件；导数 $f'(x_0)$ 存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的________条件. ——填入适当的字母即可：

（A）充分　　（B)必要

（C)充分且必要　　（D）既不充分也不必要

2.若 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=$________.

3.设 $f(x)=x(x-1)(2x-1)(3x-1)\cdots(nx-1)$，则 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内有_____个零点.

4.设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上连续的偶函数，则 $\int_{-\pi}^{\pi}[1+xf(\sin x)]dx=$_________.

5.平面过点 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$，则该平面的法向量为________.

二. 基本题（每小题 7 分）（须有计算步骤）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t)dt}{1-\cos x}$.

2.求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$.

3.设 $y=y(x)$ 是方程 $e^y+\int_0^y e^{t^2}dt-x-1=0$ 确定的隐函数，证明 $y=y(x)$ 是单调增加函数并求 $y'\big|_{x=0}$.

4.求反常积分 $\int_0^1\dfrac{u^3}{\sqrt{1-u^2}}du$.

三.（10 分）设 a 和 b 是任意两个满足 $a+b=1$ 的正数，试求 $a^m \cdot b^n$ 的最大值（其中常数 m、$n>0$）

四.（10 分）一酒杯的容器部分是由曲线 $y=x^3$（$0 \le x \le 2$，单位：cm）绕 y 轴旋转而成，若把满杯的饮料吸入杯口上方 2cm 的嘴中，要做多少功？（饮料的密度为 1g/cm^3）

五.（10 分）教材中有一例叙述了用定积分换元法可得等式

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

如果将上式左端的积分上限换成 $(2k-1)\pi$（$k \in Z$），则将有怎样的结果？进一步设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续的偶函数，$\int_0^{kT} xf(x)dx$ 将有怎样相应的表达式？

六.（10 分）设动点 $M(x\,,\,y\,,\,z)$ 到 xOy 面的距离与其到定点 $(1\,,-1\,,1)$ 的距离相等，M 的轨迹为 Σ .若 L 是 Σ 和柱面 $2z=y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线，求 L 上对应于 $1 \le x \le 2$ 的一段弧的长度.

七.（12 分）设 $f_0(x)$ 是 $[\,0\,,+\infty)$ 上的连续的单调增加函数，函数 $f_1(x)=\dfrac{\int_0^x f_0(t)dt}{x}$.

（1）如何补充定义 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 的值，使得补充定义后的函数（仍记为 $f_1(x)$）在 $[\,0\,,+\infty)$ 上连续？

（2）证明 $f_1(x)<f_0(x)$（$x>0$）且 $f_1(x)$ 也是 $[\,0\,,+\infty)$ 上的连续的单调增加函数；

（3）若 $f_2(x)=\dfrac{\int_0^x f_1(t)dt}{x}$，$f_3(x)=\dfrac{\int_0^x f_2(t)dt}{x}$，…，$f_n(x)=\dfrac{\int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x}$，则对任意的 $x>0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在.

高等数学（下）期中考试试卷 1

（答卷时间为 120 分钟）

一.填空题（每小题 6 分）

1.有关多元函数的各性质：（A）连续；（B）可微分；（C）可偏导；（D）各偏导数连续，它们的关系是怎样的？若用记号“$X \Rightarrow Y$”表示由X可推得Y，则

$$(\quad) \Rightarrow (\quad) \Rightarrow \begin{cases} (\quad) \\ (\quad) \end{cases}.$$

2.函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点$(1,1)$处的梯度为____________，该点处各方向导数中的最大值是_________.

3.设函数$F(x,y)$可微，则柱面$F(x,y)=0$在点(x,y,z)处的法向为_____________，平面曲线$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$在点$(x,y)$处的切向量为________________.

4.设函数$f(x,y)$连续，则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$_________.

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$；　　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^1 dy\int_{\pi}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$；　　(D) $\int_0^1 dy\int_{\pi}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

二.（6 分）试就方程$F(x,y,z)=0$可确定有连续偏导的函数$y=y(z,x)$，正确叙述隐函数存在定理.

三.计算题（每小题 8 分）

1.设$z=z(x,y)$是由方程$f(x-z,y-z)=0$所确定的隐函数，其中$f(u,v)$具有连续的偏导数且$\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\neq 0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$的值.

2.设二元函数$f(u,v)$有连续的偏导数，且$f_u(1,0)=f_v(1,0)=1$. 又函数$u=u(x,y)$与$v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases} x=au+bv \\ y=au-bv \end{cases}$（$a^2+b^2\neq 0$）确定，求复合函数$z=f[u(x,y),v(x,y)]$的偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,a)}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,a)}$.

3.已知曲面$z=1-x^2-y^2$上的点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z=1$，求点P处的切平面方程.

4 计算二重积分：$\iint\limits_D \sin\frac{x}{y}d\sigma$，其中$D$是以直线$y=x$，$y=2$和曲线$y=\sqrt[3]{x}$为边界的曲边三角形区域.

5.求曲线积分$\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，$L$为曲线$y=1-|1-x|$沿$x$从 0 增大到 2 的方向.

五.（10 分）球面被一平面分割为两部分，面积小的那部分称为“球冠”；同时，垂直于平面的直径被该平面分割为两段，短的一段之长度称为球冠的高. 证明：球半径为R高为h的球冠的面积与整

个球面面积之比为$h:2R$.

六.（10分）设线材L的形状为锥面曲线，其方程为：$x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$（$0\le t\le 2\pi$），其线密度$\rho(x,y,z)=z$，试求L的质量.

七.（10 分）求密度为μ的均匀柱体$x^2+y^2\le 1$，$0\le z\le 1$，对位于点$M(0,0,2)$的单位质点的引力.

高等数学（下）期中考试试卷 2

（答卷时间为 120 分钟）

一.简答题（每小题 8 分）

1.求曲线$\begin{cases} x=t-\cos t \\ y=3+\sin 2t \\ z=1+\cos 3t \end{cases}$在点$\left(\dfrac{\pi}{2},3,1\right)$处的切线方程.

2.方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$在点$(0,1,1)$的某邻域内可否确定导数连续的隐函数$z=z(x,y)$或$y=y(z,x)$或$x=x(y,z)$？为什么？

3.不需要具体求解，指出解决下列问题的两条不同的解题思路：

设椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$与平面$Ax+By+Cz+D=0$没有交点，求椭球面与平面之间的最小距离.

4.设函数$z=f(x,y)$具有二阶连续的偏导数，$y=x^3$是f的一条等高线，若$f_y(1,1)=-1$，求$f_x(1,1)$.

二.（8 分）设函数f具有二阶连续的偏导数，$u=f(xy,x+y)$求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

三.（8 分）设变量x,y,z满足方程$z=f(x,y)$及$g(x,y,z)=0$，其中f与g均具有连续的偏导数，求$\dfrac{dy}{dx}$.

四.（8 分）求曲线$\begin{cases} xyz=0, \\ x-y^2-1=0 \end{cases}$在点$(0,1,1)$处的切线与法平面的方程.

五.（8 分）计算积分）$\iint\limits_D e^{y^2}dxdy$，其中$D$是顶点分别为$(0,0)$.$(1,1)$.$(0,1)$的三角形区域.

六.（8 分）求函数$z=x^2+y^2$在圆$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$上的最大值和最小值.

七.（14 分）设一座山的方程为$z=1000-2x^2-y^2$，$M(x,y)$是山脚$z=0$即等量线$2x^2+y^2=1000$上的点.

（1）问：z在点$M(x,y)$处沿什么方向的增长率最大，并求出此增长率；

（2）攀岩活动要山脚处找一最陡的位置作为攀岩的起点，即在该等量线上找一点M使得上述增长率最大，请写出该点的坐标.

八.（14 分） 设曲面Σ是双曲线$z^2-4y^2=2$（$z>0$的一支）绕z轴旋转而成，曲面上一点M处的切平面Π与平面$x+y+z=0$平行.

（1）写出曲面Σ的方程并求出点M的坐标；

（2）若Ω是Σ.Π和柱面$x^2+y^2=1$围成的立体，求Ω的体积.

高等数学（下）期末考试试卷 1

（答卷时间为 120 分钟）

一. 简答题（每小题 5 分，要求：简洁. 明确）

1. 函数 $z = y^2 - x^2$ 在点 $(1\,,1)$ 处沿什么方向有最大的增长率，该增长率为多少？

2. 设函数 $F(x,y,z) = (z+1)\ln y + e^{xz} - 1$，为什么方程 $F(x,y,z) = 0$ 在点 $M(1,1,0)$ 的某个邻域内可以确定一个可微的二元函数 $z = z(x,y)$？

3. 曲线 $x = t^2 - 1\,,\ y = t + 1\,,\ z = t^3$ 在点 $P(0\,,2\,,1)$ 处的切线方程是什么？

4. 设平面区域 $D\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\,(a > 0, b > 0)$，积分 $\iint\limits_D (ax^3 + by^5 + c)dxdy$ 是多少？

5. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1} x^n$ 的收敛域是什么？

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & 0 \le x \le \pi, \\ e^{-x} - 1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ 的傅里叶系数为 $a_0\,,\ a_n\,, b_n\,(n = 1,2,3,\cdots)$，问级数 $a_0 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和是多少？

二. 计算积分

1.（8 分）$I = \int_{\pi}^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin x}{x} dx$

2.（8 分）$I = \int\limits_L (x+y)dx + (y-x)dy$，$L$ 为上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(y \ge 0)$ 取逆时针方向.

三.（12 分）设 $\varSigma$ 是由曲线 $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0 \end{cases} (0 \le z \le 2)$ 绕 z 轴旋转而成的曲面.

（1）写出 $\varSigma$ 的方程和 Σ 取外侧（即朝着 z 轴负方向的一侧）的单位法向量；

（2）对（1）中的定向曲面 $\varSigma$，求积分 $I = \iint\limits_{\varSigma} 4(1-y^2)dzdx + (8y+1)zdxdy$.

四.（10 分）求微分方程 $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$ 的通解

五.（10 分）把函数 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}\,(0 \le x \le \pi)$ 展成正弦级数.

六. 应用题

1.（10 分）求曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\quad (a > 0, b > 0, c > 0)$ 在第一卦限的切平面，使该切平面与三个坐标面围成的四面体的体积为最小，并写出该四面体的体积.

2.（12 分）设 $\varOmega$ 是由曲面 $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 0\,,\ z = 1$ 所围成的立体. 求：

（1）$\varOmega$ 的体积 V；（2）$\varOmega$ 的表面积 A.

高等数学（下）期末考试试卷 2

（答卷时间为 120 分钟）

一. 填空题（每小题 4 分）

1.函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在区域 D 内连续是 $z = f(x, y)$ 在 D 内可微的____________条件.（充分，必要，充要）

2.函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿 $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 的方向导数可以用公式 $\dfrac{\partial f}{\partial l} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$ 来计算的充分条件为 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处____________.（连续，偏导数存在，可微分）

3.若三阶常系数齐次线性微分方程有解 $y_1 = e^{-x}$. $y_2 = xe^{-x}$. $y_3 = e^{x}$，则该微分方程为________________.

4.周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $\begin{cases} x & 0.5 < x < 1 \\ 1 & -1 \le x \le 0.5 \end{cases}$，则它的傅里叶级数在 $x = -3.5$ 处的和为____________.

5.幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{\ln n}$ 的收敛域是____________.

二.（8 分）设函数 $f(u, v)$ 有二阶连续的偏导数，且 $f_u(0,0) = 1$， $f_v(0,0) = -1$. 函数 $z = f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$.

三.（8 分）求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 到平面 $x + y + z + 1 = 0$ 的最近距离.

四.计算下列积分：（每题 8 分）

1. $\iint\limits_{D} e^{x^2} d\sigma$，其中 D 为三直线 $y = 0$. $y = x$ 与 $x = 1$ 所围成的平面区域.

2. $\oiint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$，其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体的边界面的外侧.

3. $\oint\limits_{\Gamma} xyz\, dz$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$，从 z 轴正向看去，沿逆时针方向.

五.级数

1.（8 分）设 a_n 是等差数列，公差 $d \ne 0$，$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.问：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{s_n}$ 是绝对收敛还是条件收敛或是发散的？说明理由.

2.（12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

六.微分方程

1.（8 分）求微分方程 $xy' + y = x\ln x$ 的通解.

2.（12 分）设函数 $f(x)$ 有二阶连续的导数且 $f(0) = 0$， $f'(0) = 1$.如果积分

$$\int_L [x^2 - f(x)]y\, dx + [f'(x) + y]\, dy$$

与 L 的路径无关，求 $f(x)$.