Garden of Calculus

微 积 分 苑

同濟大學

初学微积分的感想

胡　斌

进入大学半年，《微积分》的学习使我受益匪浅. 尤其极限在微积分中的作用，我认为可以用两个字来形容，那就是“基础”. 极限是一种思想，正是由于这样一种思想的诞生，使人们解决了许多在生活中所不能解决的问题. 于是，人们认识到了这样一种思想的重要性，便想去完善它. 关于微积分的一系列理论也就随之产生了. 所以，没有极限这种思想，就不会有现在的微积分理论. 微积分中的连续、可导、以及可积的概念的引出以极限为基础也就是必然的了. 在以前，没有极限这种思想之前，人们的思维被局限在“有限的”范围里，人们对数的认识仅限于整数或有理数，对几何量的计算仅限于直边的几何体，对运动物体的研究也仅限于平均速度……，极限思想的产生和极限理论的建立无疑是对人们思维的一种开拓，使得人们冲入了一个从未进入过的新的世界，获得了一种优美而精确的数学理念！所以极限的意义不仅仅在微积分这门学科上，它也是人们思想的一次革命. 它的产生不但推出并推动了微积分这样一门学科，而且在以后的时间里，它进一步推进其它自然科学的发展，改变着我们的生活.

下面使我在学习了连续与导数有关章节后的一些思考.

1、关于连续函数的最大值和最小值定理：如果把闭区间$[]a,b$改成开区间(a,b)，最大值与最小值定理将不再成立. 因为如果这样的话，函数在端点a,b处的值将无法取到. 比如，函数的上确界$\sup\{f(x)\,|\,x\in(a,b)\}=f(a+0)$，则取不到最大值；下确界$\inf\{f(x)\,|\,x\in(a,b)\}=f(b-0)$，则取不到最小值. 由以上分析，使我们

想到，什么情况下，$\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$或$\inf\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$能在区间$(a,b)$内取到？当$f(x)$恒等于常数时，当然在$(a,b)$上既可以取到最小值又可以取到最大值，但是这种情况太有失一般性了. 如果$f(x)$在(a,b)内连续，并且$f(a+0)=f(b-0)$，这时$f(a+0)$（$=f(b-0)$）就不可能既是$\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$又是$\inf\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$，那么其中的一个想必在$(a,b)$内取到了. 要严格地证明，我想还得应该利用连续函数的最小值最大值定理：可以建立这样一个函数$g(x)$，使其满足$g(a)=f(a+0), g(b)=f(b-0)$，而在(a,b)内与$f(x)$完全相同. 则这样的一个函数完全满足定理的核心条件，于是可以很轻松的证明$g(x)$在(a,b)内至少可以取到最大值与最小值中的一个，从而也就证明了所要证明的命题，现陈述如下：

如果$f(x)$在(a,b)内连续，并且$f(a+0)=f(b-0)$，则$f(x)$在(a,b)内有最大值或最小值.

由以上的结论，很容易作出以下推广：

设函数$f(x)$在直线上连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，则$f(x)$至少可以取到最大值和最小值中的一个.

要证明这个命题，可以利用上面的结论. 创建函数$T(u)=f[g(u)]$，其中$x=g(u)$是(a,b)到$(-\infty,+\infty)$的映射，满足$g(a+0)=-\infty, g(b-0)=+\infty$，这样，$T(u)$的定义域是$(a,b)$，只要$g(u)$连续，就有$T(u)$连续，且满足$T(a+0)=T(b-0)$，则由上题的结论可

知$T(u)$在(a,b)内至少可以取到最大值和最小值中的一个，如$u_0 \in (a,b)$，$T(u_0)=\max\{T(u) \mid u \in (a,b)\}$，那么$g(u_0)=x_0$，就是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的最大值和最大值点了. 以上两个结论的证明过程中都建立了一个新的函数，使这个函数满足已经学过的定理所要求的条件，也即是建立了一个桥梁，使原来无法应用定理的问题得以解决.

2、介值定理：设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a) \neq f(b)$，则对于介于$f(\mathrm{a})$与$f(b)$之间的任意实数μ，在区间内至少存在一点x_0，使得$f(x_0)=\mu$.

定理中，$[a,b]$，是不是必要的呢？如果把$[a,b]$换成$I=(a,b)$即是要证明连续函数$f(x)$，当$f(a+0) \neq f(b-0)$时，对于介于$f(a+0), f(b-0)$之间的任意实数μ，在区间内至少存在一点x_0，使得$f(x_0)=\mu$成立. 如果画一个图的话，着一点是很容易看出的. 要想证明它成立，可以利用一下介值定理. 而要想利用介值定理，就应该在(a,b)上找一个闭区间. 只要有了一个闭区间，问题就可以解决了. 下面来证明：不妨设$f(a+0)<f(b-0)$，因为$f(b-0)-\mu=\lim\limits_{x\to b}[f(x)-\mu]>0$，由有极限函数的保号性可知存在$\delta>0$，使得在$x \in (b-\delta_1,b)$时$f(x)-\mu>0$成立，取一点$x_2 \in (b-\delta,b) \subset (a,b)$，则$f(x_2)-\mu>0$. 同理，也必定存在$x_1 \in (a,b)$，使得$f(x_1)-\mu<0$，于是在$[x_1,x_2]$便可以利用介值定理而获得所需要得结论.

如果将其中的最大值与最小值改为上确界与下确界，而把闭区间改为$I=(-\infty,+\infty)$，介值定理仍然是成立的. 设$M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$

存在，$\mu \in (m, M)$. 显然，由上确界的定义可知必存在b, 使得$f(b) > M - \varepsilon, \varepsilon > 0$，则必然有$f(b) - \mu > 0$. 同理，也存在$a$, 使得$f(a) - \mu < 0$，于是在闭区间$[a,b]$上就可以利用介值定理了. 可见在证明上述两个结论时，不再是找一个函数作桥梁，而是直接在原来的开区间或无穷区间内再寻找一个闭子区间，使这一个闭的子区间满足介值定理的条件，其指导思想仍然是尽力将问题向可以利用的定理靠拢，这种利用“内闭”性质的方法在其它地方也常使用.

以上就是我的一些学习体会，因本人能力有限，时间仓促，就暂且搁笔，姑且当做引玉之砖吧.

浅谈概念的联系与发展

王　磊

我们有时会被一些“难题”困倒而不知所措，主要是不知从何入手.聪明的人不是能立即就知道“难题”的解法，而是能把“难题”逐步分解，层次性地与书本上的知识相联系、相对照，去模仿、分析，最后得出答案.把无从下手的题变得一目了然，是什么有如此之神效，是联系思想.

细心的人会发现，其实有很多命题都是套用了几个基本模式，只是在条件上加以修饰.所以，我们只要把这个基本模式，基本框架找出，去联系基本模式的证明与公式，问题就会迎刃而解.

让我们先回顾一下学过的几个例子.如在推导介值定理时，使我们联想到零点定理的证明，因为二者是存在联系的，即 $F(x)=f(x)-\mu$. 如果我们找到这种联系，问题就解决了. 再如学习微积分中值定理时有这样的推导顺序：费马定理——Rolle 定理——Lagrange 定理——柯西定理. 为什么要采用这样的顺序？我们会发现，在这些定理之间是存在一定联系的，即由特殊性到一般性的关系. 所以每一个后面定理的证明都是以前面较为特殊的定理为基础的：罗尔定理的证明以费马定理为基础，而它又推出了 Lagrange 定理，而 Lagrange 又是柯西定理的特殊情况.

联系是抽象的.这就要求我们把题目与题目之间的联系用公式表达出来.我们应该抓住他们之间的相同点与不同点来分析.上面举的例子有些抽象，让我们来看下面一个具体的例子：

$f\in C(a,b)$, $f(a+0)f(b-0)<0$，则 $\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$.

仔细观察我们会发现，此命题是零点定理的推广，因为它与零点定理有“相同的”联系，即证明有 $x_0\in(a,b)$ 适合 $f(x_0)=0$，只是把 $[a,b]$ 改为 (a,b)，

把 $f(a)f(b)<0$ 改为 $f(a+0)f(b-0)<0$. 要证明此命题,先回顾零点定理，能否找出区间 (a,b) 的子区间 $[x_1,x_2]$ 使得满足 $f(x_1)f(x_2)<0$，也就是说我们只要解决 x_1,x_2，问题就解决了. 怎样找，这就要求我们去寻找它们之间的又一个联系——我们可以把它联系到学极限时的基本理论与基本概念加以解决. 本题的一切目标在于寻找 x_1,x_2，由此入手. 反思之，:如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内保持定号,不妨设 $f(x)\ge 0$，$x\in(a,b)$，由极限的保号性，必有 $f(a+0)\ge 0$, $f(b-0)\ge 0$，所以 $f(a+0)f(b-0)\ge 0$，这与已知条件矛盾. 所以 $f(x)$ 在 (a,b) 绝不保持定号(转入到相同点的联系)即在 (a,b) 内至少有两点 x_1,x_2 使 $f(x_1)f(x_2)<0$，这正是我们所寻找的！再联系到基础框架零点定理上，命题就证得了，清晰明了！

以上解题思路之所以如此清楚,，主要是因为能联系“零点定理”这个基本框架.上面曾经说过,各个基础定理之间都存在联系,相同之处与不同之处之所以选择“框架”一定要仔细,要慎之又慎重,不然将“越陷越深”.让我们看下面这个例子:关于导数介值性质的达布定理：

若 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$，如果 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，那么至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

咋一看,此命题与连续函数介值定理很相似. 但若慎重观察,会发现并没有给出导数 $f'(x)$ 连续条件,所以不能用介值定理. 这就使我们转入到 Rolle 定理上来,因为使得 $f'(x)=0$ 的点 $x=\xi$ 在很多情况下恰是 $f(x)$ 的局部最大值或最小值点. 回顾罗尔定理的证明，正是利用了这一性态，即费马引理所描述的性态. 我们发现,只要把条件 $f'_+(a)f'_-(b)<0$ 转入为可导函数最大

值或最小值必在(a,b)内部取得就可以了. 于是就有了如下的证明：

设 $f_+'(a)>0$ ， $f_-'(b)<0$ ，联系到极限 $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ 与 $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$ 的保号性质，在 $(a,a+\delta)$ 内有 $f(x)>f(a)$ ，在 $(b-\delta,b)$ 内有 $f(x)>f(b)$，说明 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都不是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值，因此该最大值 必然在(a,b)内部的某点ξ处取到，再联系到费马定理，有 $f'(\xi)=0$.

我想我们现在已经对”联系思想”有了初步认识，那么怎样才能更准确、更迅速地抓住要联系的基础框架呢？我们把我们所有学过的知识编织起来，组成一张网. 一张网的坚固与否主要由网上的结点决定的，而这些结点正是我们学习过的知识，即基本的概念和理论.这就要求我们把握好基础中的基础，不仅仅局限于掌握，而且要深入理解，深入挖掘其潜在内容，去大胆的扩展. 在一段时期后对学过的基本定理，基本性质，基本概念，基本公式，做一下深入总结与思考，大胆地去开拓与其相关的新的含义，大胆地去联想其可能出现的形式，大胆地去联系，这就是主动学习，养成这种学习和探索的习惯，对将来的工作或科学研究无疑是有益的!

浅谈函数的算术平均值

胡祥森

算术平均值问题是由实际需要引出的，最先引出的当是一组数的算术平均值. 如，一组数 $x_1, x_2, \cdots x_n$，其算术平均值为：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

它反映了此数组的一个指标. 由数列的算术平均值，又引出了可积函数的算术平均值. 设 $f(x)$ 在区间 $[a\,,b]$ 上可积，$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $y_i = f(x_i)$（$i = 0\,,1\,,2\,,\cdots, n-1$），

$$\bar{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_{i-1} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

$\bar{y}$ 是可积函数 $f(x)$ 在区间 $[a\,,b]$ 上的算术平均值.

由此再拓展开来，如果函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任意子区间上可积，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = A$ 存在，则把 A 定义为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的算术平均值，并记作 $\bar{f}$，即. $\bar{f} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$. 下面讨论一下可积函数在 $[0,+\infty)$ 上的算术平均值问题.

先看一个具体的函数 $f(x) = |\sin x|$，它在 $[0,+\infty)$ 上是周期为 π 的周期函数.它在 $[0,+\infty)$ 上的算术平均值是什么呢？因为 $\int_0^{+\infty} |\sin x| dx$ 不存在，（$|\sin x|$ 只在 $[0,+\infty)$ 的任一有限子区间上可积）为此我们先求 $\int_0^{k\pi} |\sin x| dx$

的值. 因为$|\sin x|$的周期是π，故根据积分的区间可加性和周期函数在一个周期长的区间上的积分相等，有

$$\int_0^{k\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx+\cdots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx=k\int_0^{\pi}\sin xdx$$

$$=2k$$

于是对 $x\in(0,+\infty)$，记 $x=k\pi+a$， $a=x-k\pi<\pi$， $f(x)=|\sin x|$ 在 $[0,+\infty)$ 上的算术平均值为

$$\overline{f}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_0^{k\pi}|\sin t|dt+\int_{k\pi}^x|\sin t|dt}{x}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k}{k\pi+a}+\lim_{k\to+\infty}\frac{|\sin\xi|(x-k\pi)}{k\pi+a}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2}{\pi+\frac{a}{\pi}}+0$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

$\frac{2}{\pi}=\frac{\int_0^{\pi}|\sin t|dt}{\pi}$ 即为函数$|\sin x|$在一个周期上的平均值.

由此想到，如果$|\sin x|$推广$[0,+\infty)$上一般周期函数 $f(x)$，那么 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的平均值是否也是它在一个周期上的平均值呢?

我们设 $f(x)$ 的最小正周期为T，并且在$[\,0\,,T\,]$上可积. $f(x)$ 有界并且有 $f(x+nT)=f(x)$（$n\in N$）.设 $kT\le x<(k+1)T$, $a=(k+1)T-x$, $a<T$,于是

$$\overline{f}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_0^{kT}f(t)dt+\int_{kT}^x f(t)dt}{kT+a}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{k\int_0^T f(t)dt+\int_{kT}^x f(t)dt}{kT+a}$$

因 $f(x)$ 有界，$\left|\int_{kT}^x f(t)dt\right|\le\int_{kT}^x|f(t)|dt<Ma,$ 故

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\int_{kT}^{x} f(t)dt}{kT+a}\right| \le \lim_{k\to+\infty}\frac{Ma}{kT+a}=0\,,$$

因此

$$\overline{f}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k\int_0^T f(t)dt}{kT+a}+\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_{kT}^{x} f(t)dt}{kT+a}=\frac{\int_0^T f(x)dx}{T}\,.$$

由此我们证实了，可积的周期函数在$[0,+\infty)$上算术平均值总存在，且等于该函数在其一个周期上的平均值.

如果函数不是周期函数呢？设$f(x)$连续，什么条件下它在$[0,+\infty)$上有平均值呢？

先来看收敛数列极限的均值不变性定理的证明，它能给我们以启发.

设$\lim\limits_{n\leftarrow\infty}x_n=a$, 记$\overline{x_n}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$， $n=1\,,2\,,\cdots$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x_n}=a$.

证 $\left|\overline{x_n}-a\right|=\dfrac{\left|x_1+x_2+\cdots+x_n-na\right|}{n}=\dfrac{\left|(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)\right|}{n}$,

$\forall\varepsilon>0$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 故 $\exists K$, 当 $n>K$ 时, 有 $\left|x_n-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 固定 K， 因 $\left|(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_K-a)\right|$是有界量，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_K-a)\right|}{n}=0\,,$$

由极限为零的定义知，$\exists N_1$,当$n>N_1$时，使得

$$\frac{\left|(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_K-a)\right|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

取$N=\max\{N_1,K\}$，当$n>N$时，

$$\left|\overline{x_n}-a\right|\le\frac{\left|(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_K-a)\right|}{n}+\frac{\left|x_{K+1}-a\right|+\left|x_{K+2}-a\right|+\cdots+\left|x_n-a\right|}{n}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-K}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x_n}=a$.（注：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 则，$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x_n}=\infty$）

由上面定理，很易猜想如果$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则必有$\overline{f}=A$, 事实上正是如此！我们可以类似地证明一个命题.

命题　设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则

$$\overline{f}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=A$$

证　据条件易知, $f(x)$在$[0,+\infty)$上是有界的. $\forall\varepsilon>0$，因$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 故　$\exists X$,　当　$x>X$　时　，　$|f(x)-A|<\varepsilon$　，　又

$$\left|\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}-A\right|=\left|\frac{\int_0^x[f(t)-A]dt}{x}\right|\le\frac{\int_0^X|f(t)-A|dt}{x}+\frac{\int_X^x|f(t)-A|dt}{x},$$

因为对固定的X，$\int_0^X|f(t)-A|dt$为有界量，故当$x\to+\infty$时上式右端的第一项趋于零；而对第二项$\frac{\int_X^x|f(t)-A|dt}{x}\le\frac{\varepsilon(x-X)}{x}<\varepsilon$，这说明当$x\to+\infty$时上式右端的第二项也趋于零.所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}-A\right|=0$，即$\overline{f}=A$.

命题已证毕，值得一提的是若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, 则$\overline{f}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\infty$，恕不赘言.

但我们注意到，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$不是$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$存在的必要条件，

例如，虽然 $\lim\limits_{x\to+\infty}|\sin x|$ 不存在，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\dfrac{2}{\pi}$ 存在.于是就产生了值得进一步探讨的问题：何时 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在的充要条件.

现设连续函数 $f(x)$ 是单调的，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=A$ 存在，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在.

因为 $f(x)$ 单调，故只有两种情况存在（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$;（2）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$ 存在.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$，结合前面叙述，易知此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\infty$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 不存在，此与题设矛盾. 因此只能 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，而且 $B=A$.

通过以上论述，我们提出一个定理：

定理　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的平均值 $\overline{f}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(x)dx}{x}$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，且 $\overline{f}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

以上我们讨论了可积的周期函数，连续函数和单调连续函数在 $[0,+\infty)$ 上的算术平均值问题，了解了函数的算术平均值和数列的算术平均值，极限与定积分等知识的联系，一方面，加深了我们对平均值概念的理解，使得这些概念能得到更广泛的应用；另一方面，在思考、推导的实践过程中又使我们体会到数学理论发展的一个轨迹，当一个数学概念建立起来后，只要我们不断地去努力探索，就会挖掘出一连串有价值的果实来，而这些果实，无疑又会发芽壮大，形成参天大树.而我们参与其中，发现有些果实

（比如，数列平均值与函数平均值）是那么相似，结蒂而连，灼然相映，或许，这就是一种美.

桥梁思想和建桥思路

李　硕

在数学定理的推广中，我们往往要从一些基础定理出发，去推导应用面更广的一些定理，而在此过程中，桥梁思想显得尤其重要.

例如以零点定理为基础，推导介值定理时，构造了这样的一座桥梁 $F(x)=f(x)-\mu$ ，再如以罗尔定理为基础，推导拉格朗日中值定理时，又构造了这样的一座桥梁 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}(x-a)$.

无论是介值定理较之于零点定理，还是拉格朗日中值较之于罗尔定理，其理论意义和应用价值都扩大了许多，而其中的关键步骤就是构造桥梁，下面我们思考一下，构造这些桥梁的基础是什呢？

是两个定理本质上的共性.在直角坐标系中任意做一个符合介值定理的函数的图形，然后移动 x 轴，使之与图形相交，不难发现，零点定理只是介指定理的一个特例，而对于罗尔定理推广到拉格朗日中值定理，不过是把原来“倾斜的”拉成“水平的”，但是，有时这种本质上的共性却不像上述两例那样直观.例如由

定理一　　**设** $f(x)\in C(a,b)$ **且** $f(a+0)=f(b-0)$ **则** $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ **与** $\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ **至少有一个可在** (a,b) **内取得**.

推导

定理二　　**设** $g(x)\in C(-\infty,+\infty)$ **且** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **存在，则** $\max\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} g(x)$ **与** $\min\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} g(x)$ **至少有一个可在** $(-\infty,+\infty)$ **取得**.

不管我们怎样变换一个符合定理一的图形，都很难让它符合定理二的条

件，但这并不说明两定理无实质共性.

在由零点到介值，由罗尔到拉格朗日推导过程中，所做的辅助图形可以把两定理的共性体现的很直观，这是因为两定理中对函数定义域的要求是相同的，要构造桥梁，只须在 $f(x)$ 外面“添加设备”，使新构造出的函数满足基础定理的条件，进而应用基础定理.

对于以上两个定理的证明，我们的大体思路不应变.仍要构造出一座桥梁，把要证的结论同基础定理联系起来.从两定理的条件入手，不同点在于函数定义域，基础定理为 (a,b)，导出定理为 $(-\infty,+\infty)$，所以我们要造的桥梁是要 $(-\infty,+\infty)$ 把映到 (a,b) 上去.既然这样，我们可不必对 $g(x)$ 大做文章，而从 x 入手：

设 $x=h(t)\in C(a,b)$，使得 $h(a,b)=(-\infty,+\infty)$，则 $G(t)=g[h(t)]$ 满足定理一的条件，于是 $G(t)$ 在 (a,b) 内的 t_0 处取得最大值或最小值，从而 $g(x)$ 在 $x_0=h(t_0)$ 处取得最大值或最小值.

现在我们简单归纳一下思路

基础：基础定理与导出定理有本质共性

A. 若基础定理中关于 x 的限定条件与导出定理相同，只须在同一坐标系中把满足导出定理的函数，通过添加项等简单变形，使之满足基础定理.

B. 若基础定理中关于 x 的限定条件与导出定理不同，则应找出函数 $x=x(t)$，使 x 满足导出定理的条件，而 t 满足基础定理的条件.

最后说一下对此问题思考的体会：在微积分学习中，要善于总结，从形形色色的题目中提炼出一个中心思想，然后用这个思想去开辟新的天地.

微积分中几个定理的推广

李志坚

一. 大家知道《微积分》是一门研究用有限步算式算不出来的一些表达式的学科。也就是说:《微积分》的方法等同于无限步计算。因此,就必须引入“极限”这个词。极限论也就理所当然的成为了〈〈微积分〉〉的重中之重。连续,可导,可积概念的引入都是以极限为基础的。从这一点,我们也可以看出极限论在微积分中的重要性。

二 . 再实际应用〈〈微积分〉〉的许多定理时,由于条件的限制,使的很多题目难于满足条件。我认为:应该把某些定理的条件推广一下,可能会更完美一些。下面是几条定理的推广:

1 有界闭区间上连续函数的最小值最大值问题。

最小值最大值定理的核心条件是(1)[a,b]是有界闭区间。(2)函数在[a,b]上连续。如果把[a,b]换成(a,b)那么 $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ 与 $\min\limits_{x\in(a,b0} f(x)$ 必然能达到吗?

当然是不一定的。当 f(x)恒等于常数这种情况时。F(x)可以取得最大值和最小值。但是,任一函数 f(x)不可能都恒等于常数。当函数的最大值最小值等于 f(a+0)或 f(b-0)时。它就取不到。所以答案是不一定的。如果 f(a+0)=f(b-0)成立的话。我们可以建立一个新函数 g(x) 使其满足 g(a)=f(a+0),g(b)=f(b-0).g(x)=f(x)x∈(a,b)这样,我们就可以知道 g(x)在(a,b)上至少可以取得最大值与最小值之中的一个了。

又如把[a,b]改成($-\infty,\infty$)则怎样才能取得它的最小值与最大值呢?

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$=a.则可以知道 f(x)为($-\infty,\infty$)内的有界连续函数,根据有界连续函数的性质我们可以知道,此时 f(x)可以同时取得最大值和最小值。

2 微分中值定理问题。

将 Rolle 定理加以推广。根据条件改成“函数 f(x)在(a,b)内可导,且 f(a+0)=f(b-0)”或者“函数 f(x)在 R 内可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 成在。

此题的解法可用(1)的方法解决。

3Cauchy 中值定理的另一种证明。

只有单调的函数才有反函数,所以,我们用反函数证明的关键是证明 $\overset{-1}{g}(x)$ 有反函数。根据已知 $\overset{-1}{g}(x)$ 不等于 0 可以知道 g(x)是单调增的或减的。也就说明 $\overset{-1}{g}(x)$ 成在反函数 g(x).我们可以设 F(x)=f[$\overset{-1}{g}(a)$].令 $\overset{-1}{g}(\partial)$ =A,

$\overset{-1}{g}(\beta)$=B。因此，根据 lanlang 定理可以知道成在一ε（$\alpha<\varepsilon<\beta$）。使得

F(β)-F(∂)=F ’ (ε)($\beta-\alpha$) 。 所 以 ，

F(b)-F(a)= $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ [g(b)-g(a)].因此，Cauchy 中值定理也就得证。

4 函数的平均值问题

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$=A。成在，就把 A 定义为 f(x)在[0，+∞]上的平均值

证明：设 f(x)为[0。+∞]上可积周期函数。设其周期为 T。则

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n\int_0^t f(t)dt+\int_{nT}^x f(t)dt}{nT+(x-nT)}=\dfrac{\int_0^T f(t)dt}{T}$ （其中

nT<x<(n+1)T）.证完。

学习《微积分》的心得与体会

姚聪璞

一、浅谈极限论在微积分理论中的地位与作用

所谓极限，就是变量的变化趋势，它是一个无限变化的过程，而整个微积分学都是建立在极限论的基础上的. 下面, 我想就自己的认识谈几点看法.

首先是函数的连续性问题. 什么条件下函数连续呢？先从几何直观上看，如果在自变量 x 无限趋近于 x_0 的时候，所对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那么就称 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 显然它是用极限来定义的.

其次，再来看一看连续函数的导函数问题. 函数在某点导数的几何意义，就是曲线上某点处切线的斜率，它是由割线取极限位置而得到的，即：y=f（x）在x_0的某个邻域x∈U（x_0, δ）内有定义，当自变量在x_0处取得增量△x （x_0+△x∈U（x_0, δ））函数y取得增量△y=f（x_0+△x）−f（x_0），若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称y=f（x）在x_0处可导，记为$f'(x_0)$ = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 若f(x)在I内每一点都可导，那么称y=f(x)在I内可导，记为f(x)∈D(I)，对D内任意一个x，都对应着一个确定的导数值，这样就定义了一个以I为定义域的新函数，称为y=f(x)在I内的导函数，记为f'(x), 即f'(x)=$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, 其中x∈I ,由此看出一个f(x)的导函数也与极限密不可分.

求一个函数的原函数的问题属于积分范畴，而求函数在某个区间上的

积分则是定积分的问题. $\int_a^b f(x)dx$ 表示的几何意义是，以 f(x)为边界，x=a,x=b 及 x 轴所围成的图形的面积. 可以采用分割、近似代替、求和、逼近四步之后，将 $\int_a^b f(x)dx$ 表示为和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta xi$ 的一个极限（$\lambda \to 0$，其中 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$，也是以极限为基础的.

此外，由于极限存在着线性运算法则，即：设 $\lim_{x} f(x) = A, \lim_{x} g(x) = B$，则 $\lim_{x}[\lambda f(x) \pm \mu g(x)] = \lambda A \pm \mu B$，所以在求导数与求积分时，才有线性运算法则：$(\alpha u \pm \beta v)' = \alpha u' \pm \beta v'$，

$$\int[\alpha u(x) \pm \beta v(x)]dx = \alpha\int u(x)dx \pm \beta\int v(x)dx$$

极限的一些重要性质在证明微积分定理时起了很大的作用. 例如极限的“保号性”，微分中值定理、费尔马引理的证明都依赖了这一性质.

反过来，求导与求积分又都影响着极限的运算. 例如，

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}型\right)$ 、$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}$（x>0）$\left(\frac{\infty}{\infty}型\right)$、$0\cdot\infty$型、$\infty\pm\infty$型、$0^0$型、$1^\infty$型、$\infty^0$型等的未定式时，可以运用洛必达法则，即 $\lim_{x}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 来求解. 尤其是在求含有积分上限函数或积分下限函数的极限时,更突出了洛必达法则的好处. 例如求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$，这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，应用洛必达法则，既可以消去 ∫ 符号，又可以消去 0 因子.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot\sin x}{2x} = \frac{1}{2e},$$

问题迎刃而解. 求定积分也可以用来求出一些特殊数列的极限. 例

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\cdots\sin\frac{n}{n}}{n}$，可以看为是 $y=\sin x$ 在 $[0,1]$ 上的定积分，

$$I=\int_0^1 \sin xdx=\cos x\Big|_1^0=1-\cos 1$$

总之，极限思想是微积分的基础，极限理论的完备化是微积分理论的科学性与正确性的保证.

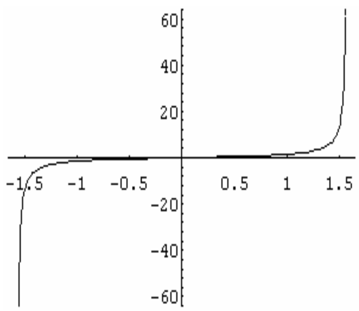
二、对一些重要定理的推广.

1、有界闭区间上连续函数的最大值最小值问题.

这个定理的核心条件是 (1) $[a,b]$ 是有界闭区间；(2) f(x)在 $[a,b]$ 上连续，结论是：f(x)在 $[a,b]$ 上有界且有最大值与最小值，即

$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow \exists\xi,\eta\in[a,b]$，使得

$\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=f(\xi),\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=f(\eta)$. 下面考虑能否将这个定理的核心条件做一些推广呢？能不能将 $[a,b]$ 改为 (a,b) 呢？例如 $y=\tan x$，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上连续，但显然其没有最大值与最小值. 见下图所示.



那么，什么情况下在开区间存在着最大值与最小值呢？联想到闭区间 $[a,b]$ 上连续的可导函数，若有 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得其为极值点，即 $f'(\xi)=0$. 便猜测能不能令 $f(a+0)=f(b-0)$，即 a,b 两处的单侧极限相等呢？如果成立，又如何证明呢？A、首先考虑，若 $f(x)$ 在 a,b

两点处为可去间断点, 即$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=A$,可以构造新函数

$g(x)$, 使得 $g(x)=\begin{cases} f(a+0)=A, x=a \\ f(x), a<x<b \\ f(b-0)=A, x=b \end{cases}$,则显然

$g(x)$连续, 由闭区间上连续函数的最大值最小值定理可得, $g(x)$必在$[a,b]$上取得最大值M 与最小值m, 现只需说明至少一个在(a,b)内取得即可. 若$M=m$, 则$g(x)\equiv C$, 显然其最值可以在内部达到；若$M\neq m$，则不可能$M=g(a)$，同时$m=g(a)$，所以最大值与最小值中一定至少有一个可以在(a,b)内取到. 即说明了 $f(x)$在(a,b)内的最值一定至少可以取到一个. B、若a 、b 为无穷间断点，则$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$，（$-\infty$的情形可以类似证明）因为$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$，故

$\forall M>0$，$\exists\delta_1$

当$0<x-a<\delta_1$时，$f(x)>M$，取$x_1=a+\delta_1$,则$f(x_1)=M$，同理

$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$表示着对于同一个$M$，$\exists\delta_2$,使得$-\delta_2<x-b<0$时，

有 $f(x)>M$，取$x_2=b-\delta_2$,则$f(x_2)=M$. 在$[x_1,x_2]$上由最大值最小值定理得其必可以取得最小值，易知其就是(a,b)上的最小值. C、若 $f(x)$在a,b处为振荡间断点时，极限不存在，不予考虑.

下面再将(a,b)改为$(-\infty,+\infty)$,则 $f(x)$在何时取得最大值或最小值呢?将上述结论稍加推广便得

$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$,且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

即可.下面来证明之.只需构造一个函数，令$x=\tan\left[\dfrac{2t-(b+a)}{2(b-a)}\pi\right]$，则当

$t\in(a,b)$时，便有$x\in(-\infty,+\infty)$，所以只须做上述变换之后，

$f(x)=f\left(\tan\left[\frac{2t-(b+a)}{2(b-a)}\pi\right]\right)$，则 $f(x)$ 实质上是一个关于 t 的连续的复合函数.由以上推广的最大值最小值定理可得，只要令

$\lim\limits_{t\to a+0} f(t)=\lim\limits_{t\to b-0} f(t)$，则 $f(x)$ 可以取到最大值或最小值，即当

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 可以取到最大值或最小值.

综上，最大值最小值定理可以推广为：

$f(x)\in C(a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ =A，则至少有一个最值可以达到； $f(x)\in C(a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty/-\infty$ ，则至少一个最值可以达到； $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A/+\infty/-\infty$，则 $f(x)$ 可以取得最大值或最小值.

2、Rolle 定理的推广

Rolle 定理告诉我们，

$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$

下面考虑若 $f(x)$ 在 $x=a, x=b$ 两点处无定义，即

$f(x)\in C(a,b)\cap D(a,b)$，而同时满足 $f(a+0)=f(b-0)$，是否仍有上述结论呢？A、若 $f(a+0)=f(b-0)=A$，补充定义

$f(a)=A, f(b)=A$，在 $[a,b]$ 上运用 Rolle 定理得 $f'(\xi)=0, \xi\in(a,b)$

B、若 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$ ($-\infty$ 同理)，则

$\forall M>0, \exists\delta_1$, 使得 $0<x-a<\delta_1$ 时, $f(x)>M$，即 $x_1=a+\delta_1$，有

$f(x_1)=M$，也 $\exists\delta_2$, 使得 $x_2=b-\delta_2$, 有 $f(x_2)=M$，在 $[x_1,x_2]$ 上运用

Rolle 定理得 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 自然 $\xi\in(a,b)$，可见我们做的推广是正确的.

那么能否进一步改为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在呢？即将 (a,b) 再扩大为 $(-\infty,+\infty)$. 由上面的最大值最小值推广可得知， $f(x)$ 必可以取得最值，则此点处的导数必为 0，（费尔马引理）. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty/-\infty$, 则同理可以取得一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$

综上，定理可作如下推广：

$$f(x)\in C(a,b)\cap D(a,b), 且 f(a+0)=f(b-0)$$
$$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b), 使得 f'(\xi)=0$$
$$f(x)\in C(-\infty,+\infty)\cap D(-\infty,+\infty), 且 \lim_{x\to\infty} f(x)=A/\infty$$
$$\Rightarrow \exists\xi\in(-\infty,+\infty), 使得 f'(\xi)=0$$

3、Cauchy 中值定理的证明

Cauchy 中值定理：如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且在 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$ ，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. 课本上用了构造辅助函数，进而运用 Rolle 定理来证明，现在尝试从别的角度来证之.

证法一：若设 $F(t)=\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases}(t 为参数)$, 且 $f(x)$, $g(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，将 $f(x)$, $g(x)$ 看为一个参数方程的部分，则每一个 t 对应一个 $f(t)$， $g(t)$. 看来是符合要求的. $F'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$, 则由拉格朗日中值定理得，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$， 则 Cauchy 中值定理得证.

证法二，利用复合函数来证明. 令 $y=g(x), x\in[a,b], 且 g'(x)\neq 0$, 由达布定理的推论得 $g(x)$ 必单调， $y\in[\alpha,\beta], g(a)=\alpha, g(b)=\beta$， 则其必有反

函数 $x=g^{-1}(y)$，而又由于 $F(x)=f(x)=f\left[g^{-1}(y)\right], y\in[\alpha,\beta]$，则在 $[\alpha,\beta]$ 上运用 Lagrange 中值定理可得，

$F(\beta)-F(\alpha)=F'(\eta)(\beta-\alpha),\eta\in(\alpha,\beta)$. 记 $g^{-1}(\eta)=\xi$,则 $\xi\in(a,b)$. 于是 $\frac{f\left[g^{-1}(\beta)\right]-f\left[g^{-1}(\alpha)\right]}{\beta-\alpha}=f'(\xi)\cdot\left[g^{-1}(\eta)\right]'=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

4、连续函数的介值性问题

闭区间上的连续函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值.这是介值定理的一个重要推论，而一般并不是所有的函数都可以很好的符合上述定理的条件，实际上，这样的函数还是很多的，那么怎么能推广这个定理，使之更具有普遍性呢？试作如下的思考，若

$f(x)\in(a,b), M=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x), m=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$,则能否成立介值定理的推论呢?因为一个函数的上确界必须首先满足 $M\geq f(x)$，下确界必须首先满足 $m\leq f(x)$，但 M,m 可能取得到，也可能取不到.若均可以取到，则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=M$ ，$\exists\eta\in(a,b)$,使得 $f(\eta)=m$，则在 ξ 与 η 之间运用介值定理得到 $f(x)$ 可以取遍 $[m,M]$ 上任何一个实数.若至少有一个取不到，则因为 $f(x)\in C(a,b)$,则必在 a 点或 b 点处极限分别取得 M,m. 即 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=M$ 或 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=m$.可以重新定义 a 点或 b 点的定义，使 $f(x)$ 在 $[m,M]$ 上取到任何值.

若将 (a,b) 再改为 $(-\infty,+\infty)$，则若 $f(x)$ 在 R 上有最大值与最小值,则在最大值与最小值所对应的局部范围内可以取得到介值定理的推论；若 $f(x)$ 在 R 上无最大值、最小值，则其确界为其极限，即

$M=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), m=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$（$M=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), m=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 同理可

证）则$\forall \varepsilon > 0, \exists X_1$,使得$f(X_1) = M - \varepsilon$，$\exists X_2$,使得$f(X_2) = m + \varepsilon$，在$\left[X_2, X_1\right]$上运用介值定理得$f(x)$必可以取得$\left[m + \varepsilon, M - \varepsilon\right]$之间的任何值，而又由上下确界的定义知，$\forall \varepsilon > 0$，至少存在一个$x > M - \varepsilon$，即$M$与$M - \varepsilon$之间可以取得任意值（$M$除外），同理$m$与$m + \varepsilon$之间也可以取遍（$m$除外）.综上可以取遍$(m, M)$之间任意值.

综上，介值定理可以推广为：

$$f(x) \in C(a,b), M = \sup_{x \in (a,b)} f(x), m = \inf_{x \in (a,b)} f(x),\text{则} f(x)\text{取遍}(m, M)\text{任一值}$$

；

$$f(x) \in C(R), M = \sup_{x \in R} f(x), m = \inf_{x \in R} f(x),\text{则} f(x)\text{取遍}(m, M)\text{任一值}.$$

5、函数平均值问题

可积函数$f(x)$在$[a,b]$上平均值为$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$，由此联想到，如果函数$f(x)$在$[0,+\infty)$的任一子区间上可积，极限$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x} = A$存在，就把$A$定义为$f(x)$在$[0,+\infty)$上的平均值.现考虑如果$f(x)$是可积的周期函数，那么均值是否一定存在呢？令$f(x+T) = f(x)$，即$f(x)$是以$T$为周期的函数，则任给一个$x$，必有$kT \le x < (k+1)T$，则

$\dfrac{x}{T} = \left[\dfrac{x}{T}\right] + \left(\dfrac{x}{T}\right) = k + \left(\dfrac{x}{T}\right)$，故$x = kT + \left(\dfrac{x}{T}\right) \cdot T$，显然$\left(\dfrac{x}{T}\right) \cdot T \le T$，则

当$x \to +\infty$时，$\dfrac{\left(\dfrac{x}{T}\right) \cdot T}{x} \to 0$，（无穷小量×有界量=无穷小量），故有

$\dfrac{kT}{x} \to 1, (x \to +\infty)$.根据区间可加性，

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{kT} f(t)dt + \int_{kT}^x f(t)dt = k\int_0^T f(t)dt + \int_{kT}^x f(t)dt,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k\int_0^T f(t)dt+\int_{kT}^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x}\int_0^T f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{kT}^x f(t)dt}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\xi)(x-}{x}$$

$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}f(\xi)(1-\frac{kT}{x})=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$.因为$\frac{kT}{x}\to 1$，故

$1-\frac{kT}{x}\to 0$，$f(\xi)\cdot(1-\frac{kT}{x})\to 0$，故得到了可积周期函数在$[0,+\infty)$上的平均值一定存在，即为其在一个周期上的平均值.

以上几点只是我自己在学习过程中所做的一点总结，希望与大家共同探讨这方面的问题.

学习微积分的心得与体会

于　淼

一、谈谈极限论在微积分理论中的地位与应用

自然界中有很多量仅仅通过有限次的算术运算是计算不出来的，而必须通过分析一个无限变化过程的变化趋势才能求得结果，这正是极限概念和极限方法产生的客观基础.微积分是一门以变量作为研究对象，以极限方法作为基本研究手段的数学学科.应用极限方法研究各类变化率问题和几何学中曲线的切线问题，就产生了微分学；应用极限方法研究诸如曲边图形的面积等这类涉及到微小量无穷积累的问题，就产生了积分学.可以说，整个微积分学是建立在极限理论的础上的.例如对连续、可导、可积概念的引出均是以极限为基础.

二、对一些重要定理的推广

1、有界闭区间上连续函数的最大最小值问题

（1）如果把$[a,b]$改成(a,b)，若函数$f(x)$在区间(a,b)内连续，那么函数的最大值和最小值是否必然达到？不一定达到. 例如$f(x)=x$在$(-1,1)$）内无最大最小值.

（2）如果$f(a+0)=f(b-0)=A$存在，那么最大值和最小值至少有一个可以达到，怎么证明？

对于此类问题，大多采取补充定义的方法将开区间变为闭区间，并要注意讨论最值点不是补充上去的点，而是原区间内的点.

证明　补充定义，令$f(a)=f(b)=A$，则补充定义后的函数（仍记为$f(x)$）在$[a,b]$上连续.

若 $f(x) \equiv A$，则最大值和最小值均可在 (a,b) 内取得；不妨 $f(x)$ 不恒为常数，则最大值与最小值可在 $[a,b]$ 上取得，而且两者不相等，故其中必有一个不等于 $f(a)$（$= f(b)$），说明它在 (a,b) 内取得.

2、微分中值定理问题

对罗尔定理进行推广，把条件改为“ $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f(a+0) = f(b-0)$ 存在”或“ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在”那么也有相应的结论.

我们来证明后一个命题：设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，由于 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$，所以在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 有界，必存在上确界 M，下确界 m. 不失一般性，设 $f(x) \neq$ 常数. 于是 A 不可能同时等于 M 和 m，假设 $A \neq M$，因为 M 可以取到，故有 $x_0 \in R$ 使得 $M = f(x_0)$，对于任意的 $x \in R$，$f(x_0 \geq f(x)$，由费马引理知 $f'(x_0) = 0$.

谈谈学习《微积分》的心得与体会

自然界中有很多量仅仅通过有限次的算术运算是计算不出来的，而必须通过分析一个无限变化过程的变化趋势才能求得结果，这正是极限概念和极限方法产生的客观基础。

微积分与中学里学的初等数学不同，初等数学的研究对象基本上是不变的量，而微积分是一门以变量作为研究对象、以极限方法作为基本研究手段的数学学科。

连续、可导、可积概念的引出无不以极限为基础。连续性是函数的一个重要性质，是对客观世界广泛存在的连续变动现象的数学描述，是通过极限加以引入的，即函数 y=f（x）在点 x_0 处的某一领域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，并且等于 f（x_0），即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{f}(x_0)$，则称函数 f（x）在点 x_0 处连续；导数表示一个函数的因变量相对于自变量的变化的快慢程度，即因变量关于自变量的变化率，这一概念的引出也离不开极限，导数的定义为：函数 y=f（x）在点 x_0 的某个领域内有定义，当自变量在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该领域内）时，相应地，函数 y 取得增量 Δy =f（$x_0+\Delta x$）-f（x_0）。如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，那么称函数 y=f（x）在点 x_0 处可导，并称这个极限为 y=f（x）在点 x_0 处的导数，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；同样，可积概念的引出也离不开极限，设函数 f∈B[a，b]，在区间[a，b]中任意插入（n-1）个分点，

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间[a，b]分成 n 个小区间

$$[x_0,\ x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各个小区间的长度依次为：

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1},$$

在每个小区间[x_{i-1},x_i]上任取一点 $\xi_i\left(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\right)$，作函数值 $\mathrm{f}(\xi_i)$ 与该小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，并作积

$$s=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，若不论对区间[a，b]如何分，也不论在小区间[$x_{i-1},x_i$]上点 ξ_i 怎样取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的常数 I，那么称极限 I 为函数 f（x）在区

间[a，b]上的定积分，记为$\int_a^b f(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。由上述可见，极限论在微积分理论中地位极其重要，可谓起着举足轻重的作用。

我们现在讨论的最大值最小值定理的核心条件是⑴[a，b]是有界闭区间；⑵函数在[a，b]上连续。缺一不可。如果把[a，b]改成（a，b），若保持函数 f（x）在（a，b）内连续这一条件，则$\max_{x\in(a,b)} f(x)$与$\min_{x\in(a,b)} f(x)$可能到达。若 f（a+0）=f（b-0）存在，则至少有一个可以取到，这是因为，只要 f（x）不是常函数，由 f（a）=f（b)，则必然存在一点ξ，使 f（ξ）>f（a）或 f（ξ）< f（b)，从而至少有一个可以取到。若把[a，b]改成（-∞，+∞），则当函数不是在（-∞，+∞）内单调增加（减少），即在某些区间上单调增加，某些区间单调减少时，f（x）可以取得最大值$\max_{x\in(-\infty,+\infty)} f(x)$或最小值$\min_{x\in(-\infty,+\infty)} f(x)$。

再则，连续函数的介值定理是：设函数 f（x）在闭区间[a，b]上连续，且 f（a）≠f（b)，则对介于 f（a）与 f（b）之间的任何实数 u，在区间（a，b）内至少存在一点x_0，使得 f（x_0）=u。现在，若把[a，b]改成 I=（a，b）或（-∞，+∞），把 M=$\max_{x\in[a,b]} f(x)$与 m=$\min_{x\in[a,b]} f(x)$分别改为 M=$\sup_{x\in I} f(x)$与$m=\inf_{x\in I} f(x)$，则介值定理的结论任然成立。

另外，Rolle 定理在微分学中有着很重要的作用，即如果 f（x）在闭区间[a，b]上连续，开区间（a，b）内可导，且满足 f（a）=f（b)，则至少存在一点ξ$\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$。对其进行一定的推广，即将条件改为“函数 f（x）在（a，b）内可导，且 f（a+0）=f（b-0）”，则有相应结论“至少存在一点ξ$\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$”，这是因为 f（a+0）=f（b-0）保证了函数连续和 f（a）=f（b）两个条件，从而与原定理类似。

还有，函数的平均值问题在现实中也是有实用价值的。可积函数 f（x）在[a，b]上的平均值为$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$，由此想到，若函数 f（x）在$[0,+\infty)$的任意有限区间上可积的，极限$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$=A 存在，就把 A 定义为 f（x）在$[0,+\infty)$上的平均值，显然，有如下 3 个推论：

①可积的周期函数在$[0,+\infty)$上的平均值总是存在的；

②连续函数 f(x)在$[0,+\infty)$上有平均值的一个充分条件是$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$存在；

③如果连续函数 f（x）在$[0,+\infty)$上是单调的，则$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$存在是 f（x）在$[0,+\infty)$上有平均值的充分必要条件。

由洛比达法则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，所以①②是显然成立的，由②知，对③只要证必要性，因为连续函数 f（x）在 $[0,+\infty)$ 上是单调的，则要在 $[0,+\infty)$ 上有平均值，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$=A，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，得证。

观察函数、函数的导函数以及函数的原函数，可以知其是有一定关联的，现只看奇偶性和周期性两方面。

奇偶性：

函数：如 f（x）是奇函数，则 f（-x）=-f（x）；如 f（x）是偶函数，则 f（-x）=f（x）；

函数的导函数：如 f（x）是奇函数，则 $[f(-x)]'=[-f(x)]'=-f'(x)$；如 f（x）是偶函数，则 $[f(-x)]'=f'(x)$。

函数的原函数：如 f（x）是奇函数，则 $\int f(-x)dx=-\int f(x)dx$；如 f（x）是偶函数，则 $\int f(-x)dx=-\int f(x)dx$。

周期性：

函数：$f(x+T)=f(x)$；

函数的导函数：$[f(x+T)]'=f'(x)$；

函数的原函数：$\int f(x+T)dx=\int f(x)dx$。

学习微积分后，使我对数学有了更深一步的认识，这将为我今后进一步学习打下基础。