陈酒出售的最佳时机问题

- 施磊

问题1

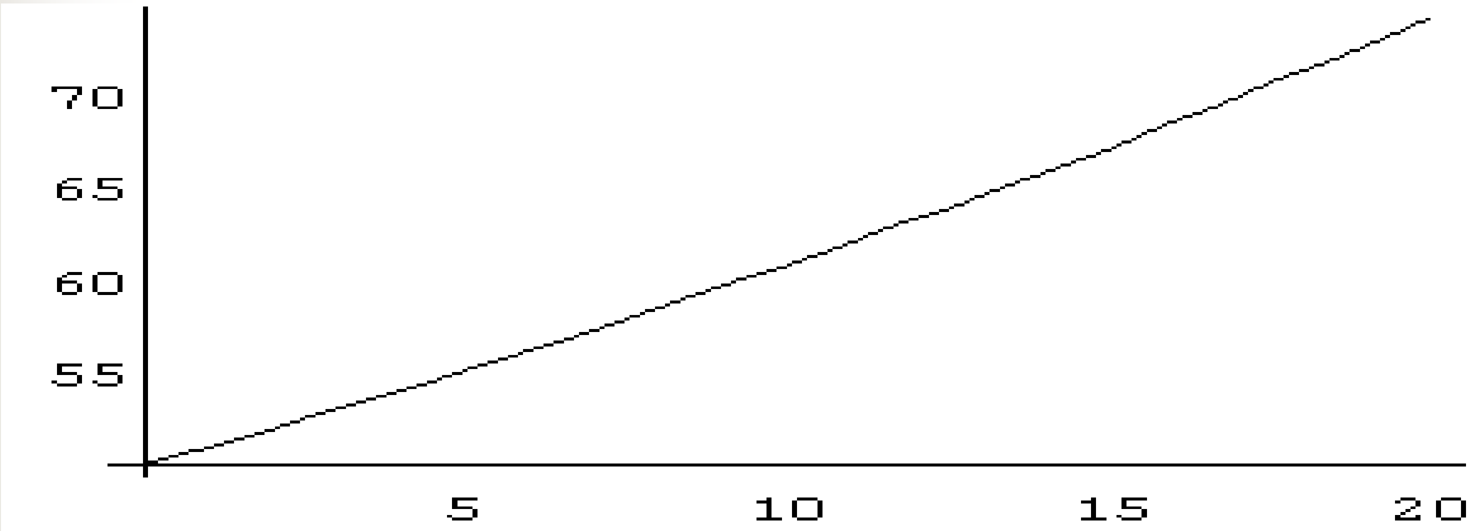
- 某酒厂有批新酿的好酒，如果现在出售，可以总收入Ro=50万元，如果窖藏起来待来日（第N年）按陈酒价格出售，第N年末可得总收入R=Roe^Sqrt(x)/12 （万元）。而银行利率为r=0.02。现有下列出售方案:
- 1：现在就出售这批酒，并把收入所得存入银行。
- 2：窖藏起来，待第N年出售，并把所的收入存入银行。

第一种方案

- 现在就出售这批酒，并把收入所得存入银行，则每年年末收入总值的计算式为：
- R=R。(1+0.02)^x
- 输入命令：
- R。=50
- x=0
- Do[x=x+1;;Print[x];Print[r0*(1+0.02)^x];
- If[n==16,Break[]],{n,16}]
- Plot[r0*(1+0.02)^x,{x,0,20}]

得：

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
51	52.02	53.060	54.122	55.204	56.308	57.434	58.583
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
59.755	60.950	62.170	63.412	64.680	65.974	67.293	68.639



第二种方案

- 窖藏起来，待第N年出售，并把所有的收入存入银行。则有计算式：
- R=R。e^Sqrt(x)/12*(1+0.02)^(16-x)
- 输入命令：
- **R.=50**
- **Do[Print[a];x=a;Do[x=x+1;Print[x,_,N[r0*Exp[Sqrt[a]/12](1+0.02)^(x-a)]];**
- **If[x==16,Break[]],{n,16}],{a,6}]**
- 即得：

第1年出售这批酒每年年末收入总值:

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
54.345	55.432	56.541	57.672	58.825	60.002	61.206	62.426
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
63.674	64.948	66.247	67.571	68.923	70.301	70.704	73.142

第2年出售这批酒每年年末收入总值:

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
0	56.254	57.379	58.527	59.697	60.891	62.109	63.351
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
64.618	65.910	67.229	68.573	69.945	71.344	72.770	74.226

第3年出售这批酒每年年末收入总值:

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
0	0	57.764	58.919	60.698	61.299	62.525	63.776
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
65.051	66.352	67.680	69.033	70.414	71.822	73.258	74.724

第4年出售这批酒每年年末收入总值：

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
0	0	0	59.068	60.249	61.454	62.684	63.937
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
65.216	66.520	67.851	69.208	70.592	72.004	73.444	74.913

第5年出售这批酒每年年末收入总值:

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
0	0	0	0	60.242	61.446	62.675	63.929
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
65.207	66.512	67.842	69.199	70.58	71.994	73.434	74.903

第6年出售这批酒每年年末收入总值:

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
0	0	0	0	0	61.323	62.549	63.800
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
65.076	66.378	67.705	69.059	70.440	70.849	73.286	74.752

比较上表中的数据，考虑如下问题：

- （1）如果酒厂希望在 2 年后投资扩建酒厂，应选择哪一种方案使得这批好酒的价值发挥最大作用？
- 答：由上表可知，选择*第二种方案的在第2年*卖出，这批酒能发挥最大价值。
- （2）如果酒厂希望在 6 年后将资金作其他投资，应选择哪一种方案？
- 答：由上表可知，选择*第二种方案的在第4年*卖出，这批酒能发挥最大价值。

问题2

- 假设X（万元）现金，将其存入银行，等到第n年时增值为R（n）根据复利公式

R(n)=X(1+0.02)^n,则称X为R(n)的现值。计算16年后陈酒出售后的总收入R(n)的现值

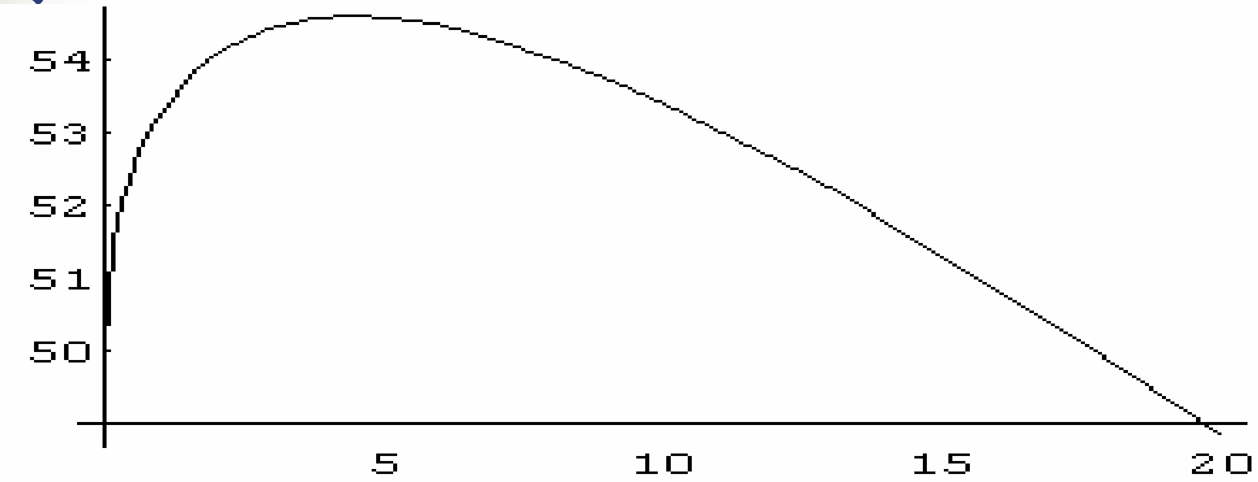
（下表中年份为出售年份）

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
53.280	54.069	54.432	54.570	54.563	54.453	54.265	54.017
第9年	第10年	第11年	第12年	第13年	第14年	第15年	第16年
53.721	53.385	53.015	52.618	52.198	51.759	51.302	50.831

输入命令：

```
R.=50
x=0
Do[x=x+1;;Print[x];Print[N[r0*Exp[Sqrt[x]/12]/(1+0.02)^x]];
If[n==16,Break[]],{n,16}]
Plot[r0*Exp[Sqrt[x]/12]/(1+0.02)^x,{x,0,20}]
```

即得：



根据上表的数据回答问题：

- （1）如果酒厂打算出售所得的用于8年后的另外投资，选择哪一年作为出售陈酒的最佳时间？

答：由出售陈酒的收入的现值数据可知，最大为第四年，所以应在*第四年*出售。

（2） 如果银行利率提高到0.03，将出售的收入再存入银行使得资金增值最大，又应如何选择？

答： 由题可知， 终值的代数式为：

X=[R•e^(Sqrt(x)/12)*(1+0.03)^(8-x)]

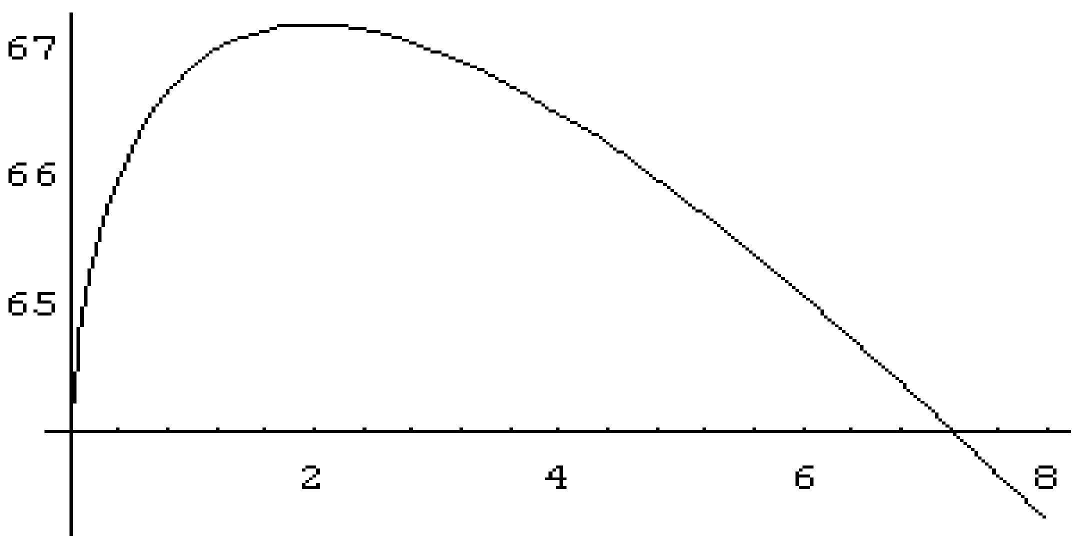
可得：

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年	第六年	第七年	第八年
66.838	67.170	66.964	66.482	65.828	65.057	64.204	63.290

输入：

```
R.=50
x=0
Do[x=x+1;;Print[x];Print[N[r0*Exp[Sqrt[x]/12]*(1+0.03)^(8-x)]];
If[x==8,Break[]],{n,16}]
Plot[r0*Exp[Sqrt[x]/12]*(1+0.03)^(8-x),{x,0,8}]
```

得图象如下：



见可第二年出售并且存入银行可使增值最大。

此致

敬礼

实验题 1 陈酒出售的最佳时机问题

1. 第一种方案中第 n 年收入的值为 R0(1+R)^n,其中 R0 为现在出售的总收入，r 为银行的年利率 0.02，由此可分别计算出各年的收入总值（见下表）：

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
51.00	52.02	53.06	54.12	55.20	56.31	57.43	58.58
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
59.75	60.95	62.17	63.41	64.68	65.97	67.29	68.64

第二种方案中第 n 年出售，则 n 年末的总收入为 S0=R0e^（sqrt(n)/12），所以从这年开始存入银行所得收入为 S0(1+r)^k,其中 k 从 0 到 16-n，于是当 n 取不同的值时结果如下（n 从 1 到 6）

n=1:

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
54.35	55.43	56.54	57.67	58.82	60.00	61.2	62.42
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
63.67	64.94	66.25	67.57	68.92	70.30	71.71	73.14

n=2:

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
0.00	56.25	57.38	58.53	59.70	60.89	62.11	63.35
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
64.62	65.91	67.23	68.57	69.94	71.34	72.77	74.23

n=3:

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
0.00	0.00	57.76	58.92	60.10	61.30	61.52	63.78
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
65.05	66.35	67.68	69.03	70.41	71.82	73.26	74.72

n=4:

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
0.00	0.00	0.00	59.07	60.25	61.45	62.68	63.94
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
65.22	66.52	67.85	69.21	70.59	72.00	73.44	74.91

n=5:

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
0.00	0.00	0.00	0.00	60.24	61.44	62.68	63.93

第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
65.21	66.51	67.84	69.2	70.58	72.00	73.43	74.9

n=6:

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	61.32	62.55	63.80
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
65.08	66.38	67.71	69.06	70.44	71.85	73.29	74.75

比较上面的数据后可得出以下结论：

(i) 2 年后投资扩建酒厂，应该选择第二种方案，并在第二年将酒卖出，此时所得钱最多。

(ii) 6 年后将资金用作其他投资，应该选择第二种方案，并在第四年将酒卖出，此时所得钱最多。

R(n)的现值即为 R0e^(sqrt(n)/12),分别取 1 到 16 可得到下表:

R(n)的现值数据如下表：

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
54.35	56.25	57.76	79.07	60.24	61.32	62.33	63.29
第 9 年	第 10 年	第 11 年	第 12 年	第 13 年	第 14 年	第 15 年	第 16 年
64.20	65.08	65.92	66.73	67.52	68.29	69.05	69.78

(i) 8 年后作另外投资，则第 n 年卖出到第 8 年的收入如下表：

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
62.42	63.35	63.78	63.94	63.93	63.80	63.58	63.29

最大值为第四年，所以第四年卖出最佳。

(ii) 如果银行利率提高到 0.03，则第 n 年卖出到第 8 年的收入如下表：

第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年	第 8 年
66.83	67.17	66.96	66.48	65.83	65.06	64.20	63.29

第二年有最大值，所以第二年卖出最佳。

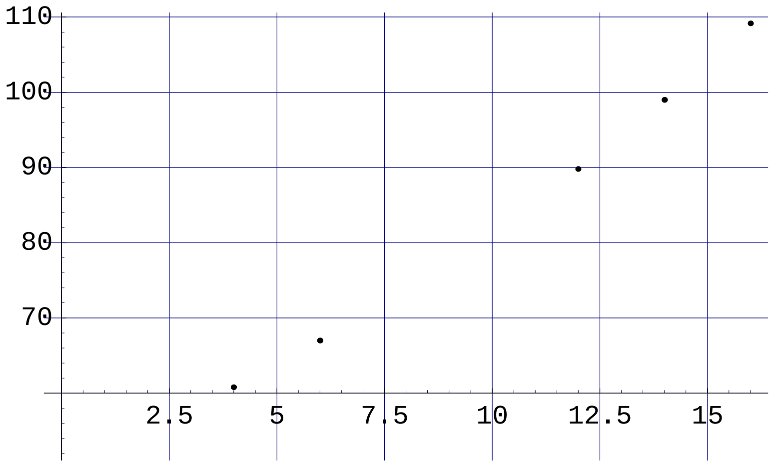
朱韵韵

实验一 陈酒出售的最佳时机问题

1.数据比较

```
(*第一方案的分析*)
f[x_] := 50 * (1 + 0.05) ^x
data = Table[f[x], {x, 1, 16, 1}]
ListPlot[data, GridLines → Automatic]
```

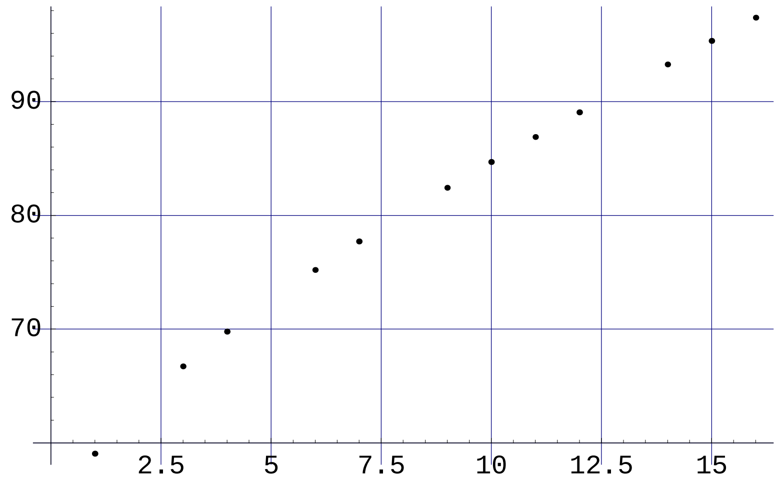
```
{52.5, 55.125, 57.8813, 60.7753, 63.8141, 67.0048, 70.355, 73.8728,
 77.5664, 81.4447, 85.517, 89.7928, 94.2825, 98.9966, 103.946, 109.144}
```




```
- Graphics -
```

```
(*第二方案的分析*)
f[x_] := 50 * E^(x^(1/2)/6)
data = Table[f[x], {x, 1, 16, 1}]
ListPlot[data, GridLines → Automatic]
N[data, 6]
```

$$\left\{50\,e^{1/6},\ 50\,e^{\frac{1}{3\sqrt{2}}},\ 50\,e^{\frac{1}{2\sqrt{3}}},\ 50\,e^{1/3},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{5}}{6}},\ 50\,e^{\frac{1}{\sqrt{6}}},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{7}}{6}},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{2}}{3}},\ 50\sqrt{e},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{11}}{6}},\ 50\,e^{\frac{1}{\sqrt{3}}},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{13}}{6}},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{3}},\ 50\,e^{\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}},\ 50\,e^{2/3}\right\}$$

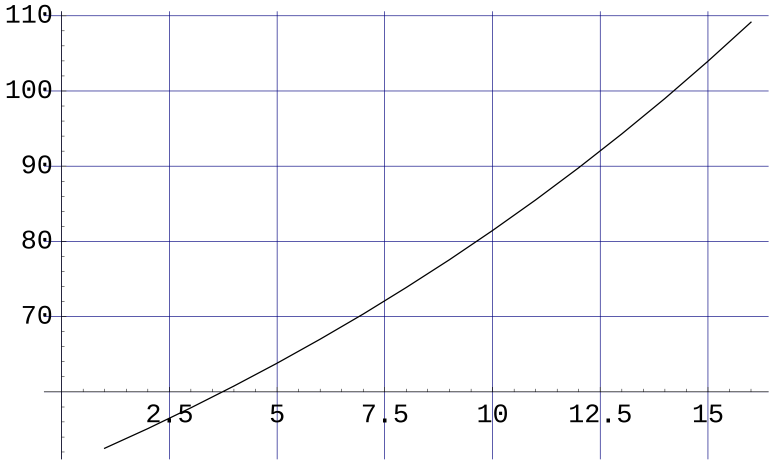



```
- Graphics -
```

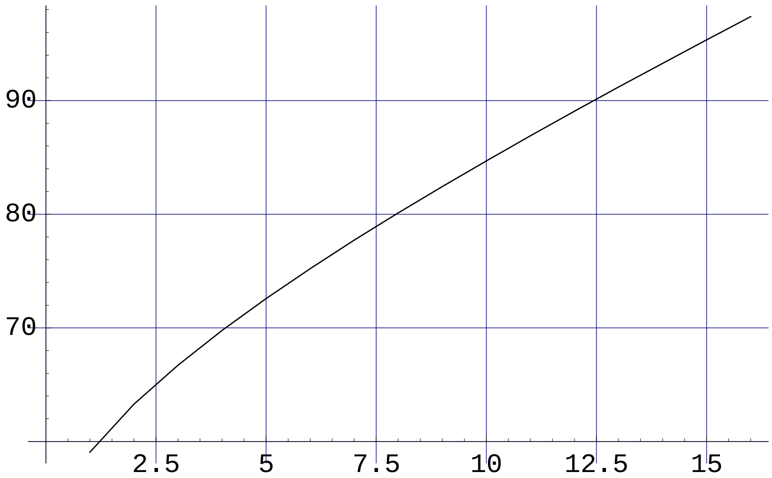
```
{59.0680, 63.2899, 66.7329, 69.7806, 72.5808, 75.2090, 77.7098, 80.1121,
 82.4361, 84.6961, 86.9031, 89.0656, 91.1903, 93.2825, 95.3467, 97.3867}
```

两方案的图形比较分析

```
t1 = ListPlot[Table[50 * (1 + 0.05)^y, {y, 1, 16, 1}],
  GridLines → Automatic, PlotJoined → True]
t2 = ListPlot[Table[50 * E^(x^(1/2)/6), {x, 1, 16, 1}],
  GridLines → Automatic, PlotJoined → True]
Show[
 t1,
 t2]
```



- Graphics -



- Graphics -

- Graphics -

由上表数据可知，如果酒厂两年后投资扩建，应用第二种方案

由上表数据可知，如果酒厂六年后投资扩建，应用第二种方案

2.进一步分析

```
f[x_] := 50 * E^(Sqrt[x] / 6) * (1 + 0.05)^(8 - x)
data = Table[f[x], {x, 1, 8, 1}]
ListPlot[data, PlotJoined → True, GridLines → Automatic]
```

$\{83.1146, 84.8145, 85.17, 84.8188, 84.0214, 82.918, 81.5953, 50\, e^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\}$

- Graphics -

由上表数据可知，如果酒厂打算将这批好酒出售所得收入用于

八年后的另外投资，应该选择第三年作为出售陈酒的最佳时期，

如果综合考虑银行利率，将出售陈酒后所得的总收入再存入银行，

使得八年后资金增值最大，应该选择第三年作为出售陈酒的最佳

时期

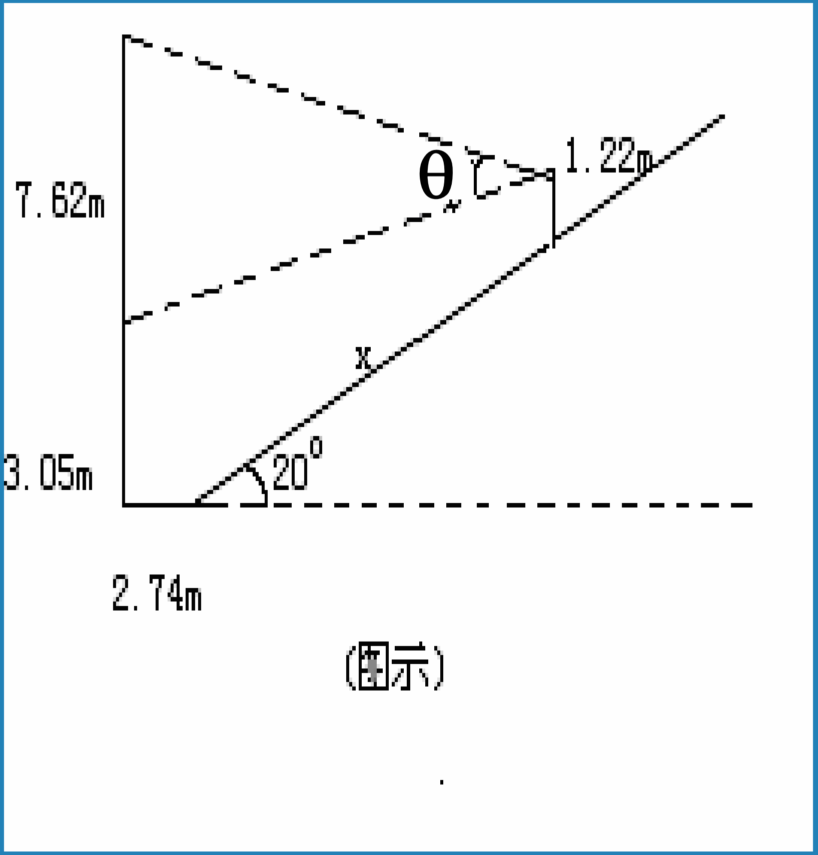
数学实验题+

提出问题:

某电影放映场内的银幕高为7.62米,其下沿距地面3.05米.第一排座位离银幕距离为2.74米,每两排座位间距为0.91米,共设21排.剧场地面从第一排座位开始为一个倾角为20度的斜坡,设观众所在的座位离斜坡起点处的距离为x米(0≤x≤18.2).现假设观众的最佳位置是这样的位置,它使得观众眼睛对银幕的张角θ最大,又设观众的眼睛距地面1.22米.试问那一排的座位最佳? 试画出张角θ随x变化的图形，并求出θ在x的变化区间[0，18.2]上的平均值。

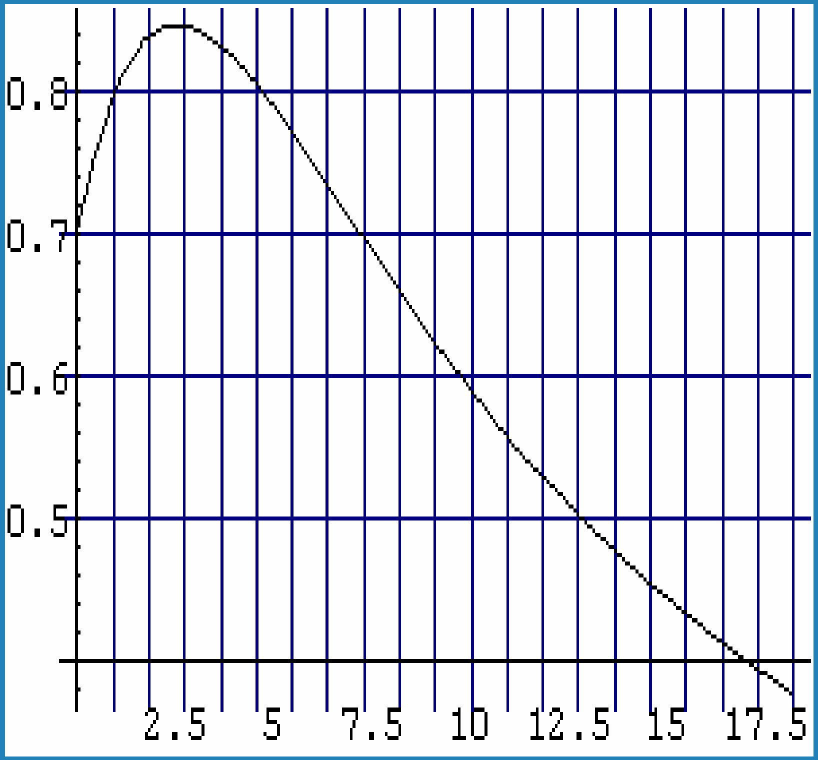
示意图：

- 首先定义角以及相关的辅助函数alfa,a[x_],b[x_].



键入程序得图象：

- alfa=20Pi/180;
- a[x_]:=Sqrt[(2.74+x*Cos[alfa])^2+(9.45-x*Sin[alfa])^2]
- b[x_]:=Sqrt[(2.74+x*Cos[alfa])^2+(x*Sin[alfa]-1.83)^2]
- theta[X_]:=ArcCos[(a[X]^2+b[X]^2-7.62^2)/2/a[X]/b[X]]
- Plot[theta[x],{x,0,18.2},GridLines->{Table[0.91*(i-1),{i,1,21}],Automatic}]

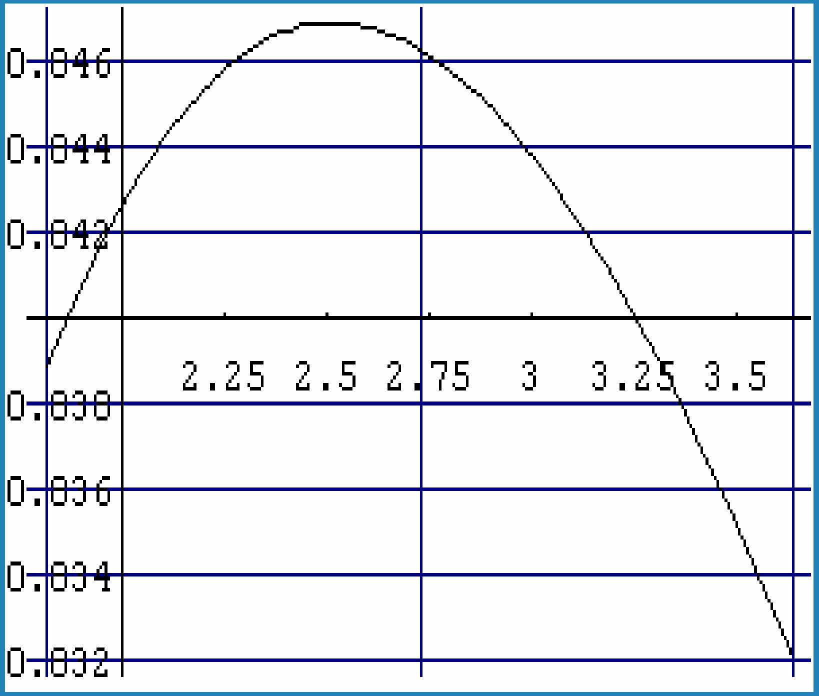


分析上图，可知:

- 图中，张角随x的变化而改变，它的最高点位于第三、四、五排中的某一点处，必须考虑到排数只能取到整数，而不能是小数。为了进一步观察，我们作小区间[1.82，3.64]上x的图象。

键入作图程序即得图象：

- Plot[theta[x],{x,1.82,3.64},GridLines->{Table[0.91*(i-1),{i,3,5}],Automatic}]



讨论最值并求平均值

- 最值讨论：
- 由上图象分析得，最值点处为x=2.5,但此时对应的排数为小数。故就近取x=2.73,对应为第四排时，张角达到最大，最大值M≈0.84631。
- 求均值
- 键入NIntegrate[theta[x],{x,0,18.2}]/18.2//N运行得张角平均值为θ=0.626023

实验结果：

- 最佳的座位在第四排
- θ 在区间上的均值为θ =0.626023

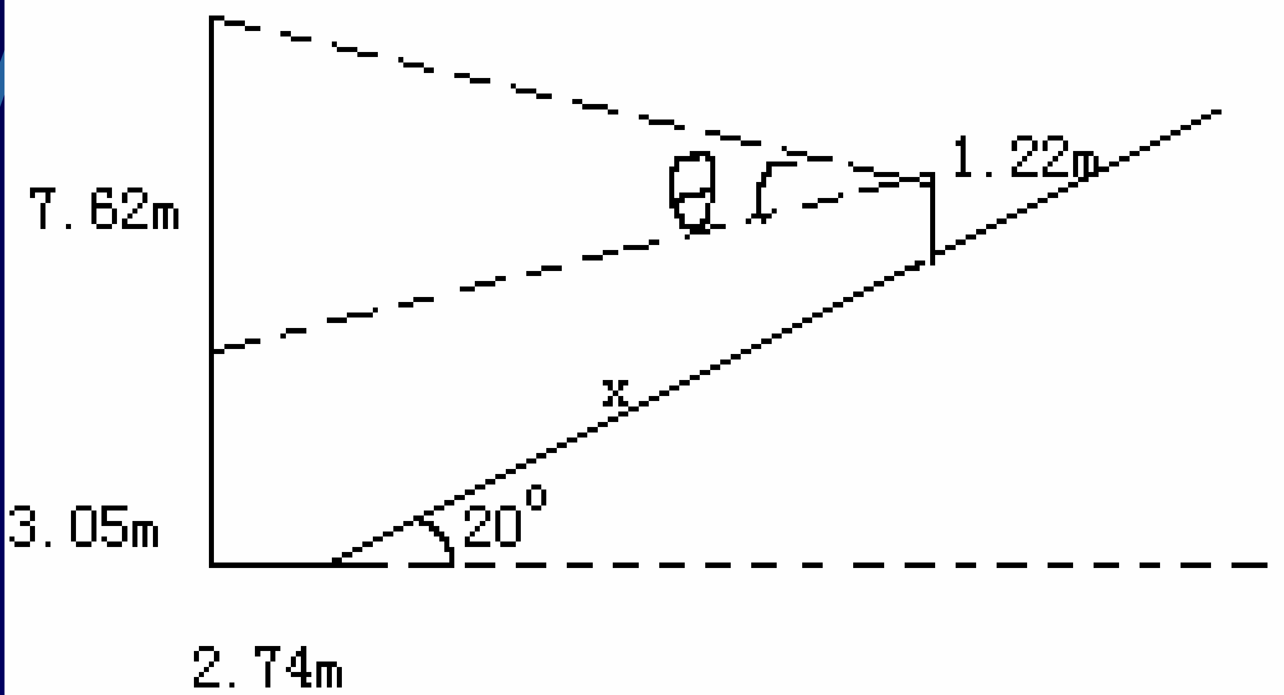
实验过程分析：

- 开始定义辅助函数，根据令a=观众与荧幕顶的距离，b=观众与荧幕底的距离，由勾股定理及余弦定理推出。
- 本文稿对MATHEMATIC 的运行结果进行了适当删节。

数学实验（一）

某电影放映厂内的银幕高为7.62m,其下沿距地面3.05m,第一排座位离银幕距离为2.74m,每两排座位的间距为0.91m,共设21排.剧场地面从第一排座位开始为一个倾角为20度的斜坡,观众的眼睛距地面1.22m.现假设观众的最佳座位是这样的位置,它使得观众的眼睛对银幕的张角达到最大.试问哪一排的座位最佳?试画出张角随x变化的图形,并求出角度在x的变化区间[0,1.82]上的平均值(见图示).

题图

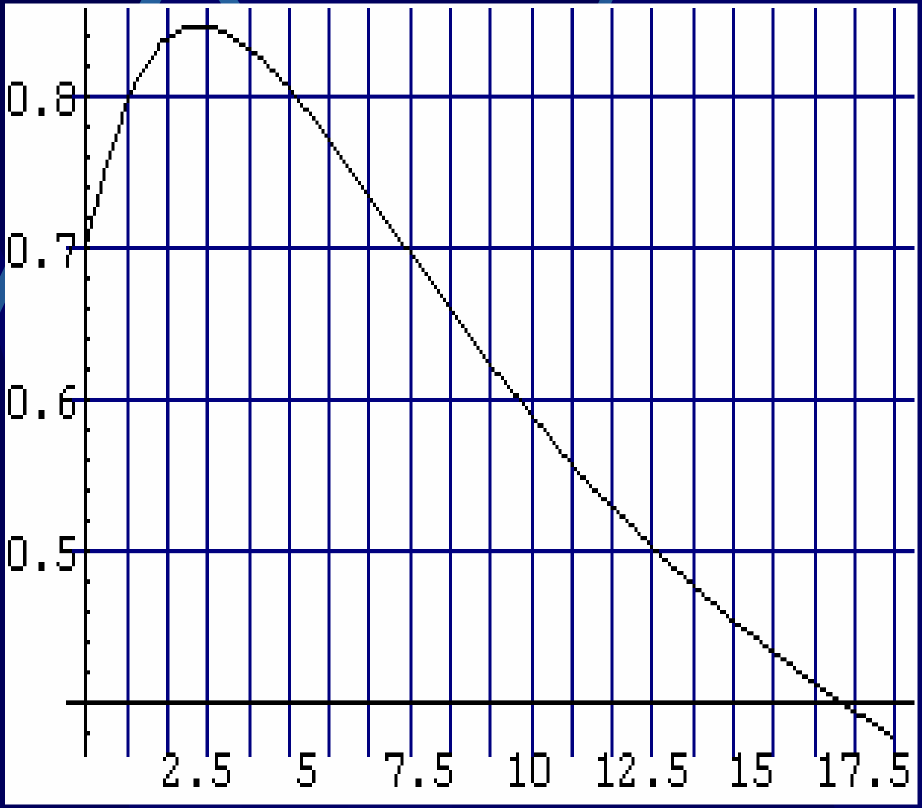


(图示)

首先赋值角度，并定义函数a(x),b(x)及θ(x)做出角度的图形

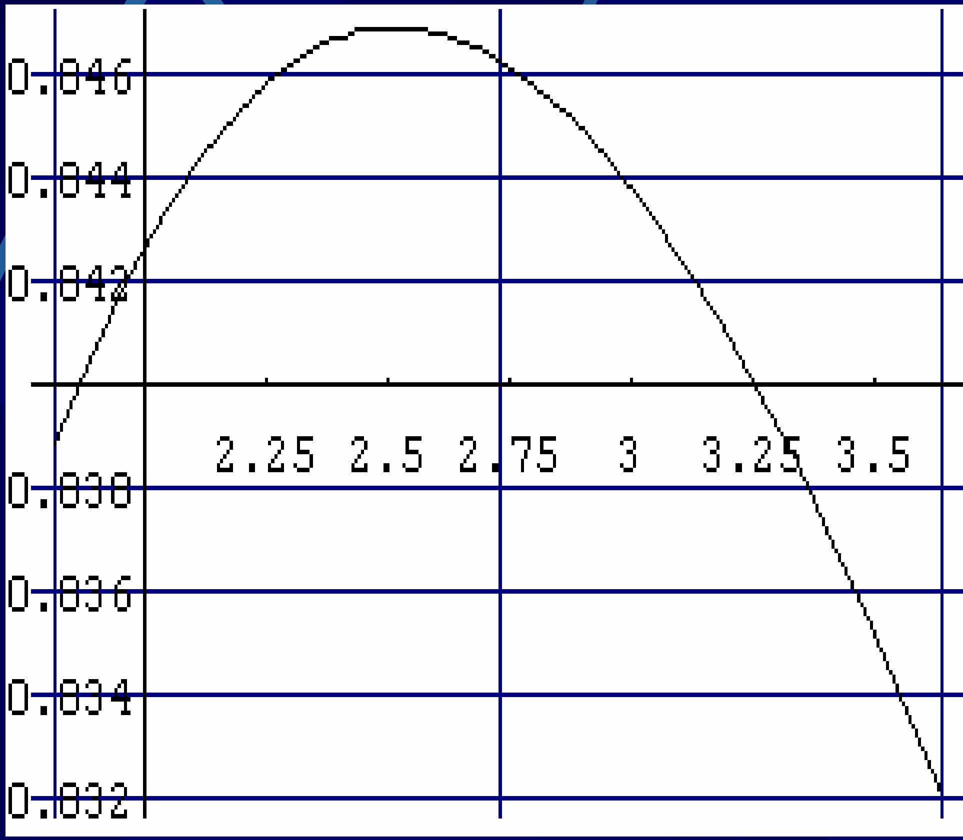
```
alfa=20Pi/180;
a[x_]:=Sqrt[(2.74+x*Cos[alfa])^2+
    (9.45-x*Sin[alfa])^2]
b[x_]:=Sqrt[(2.74+x*Cos[alfa])^2+
    (x*Sin[alfa]-1.83)^2]
theta[X_]:=ArcCos[(a[X]^2+b[X]^
    2-7.62^2)/2/a[X]/b[X]]

Plot[theta[x],{x,0,18.2},GridLines-
    >{Table[0.91*(i-
    1),{i,1,21}],Automatic}]
```



取定小区间继续作图以便观察

Plot[theta[x],{x,1.82,3.64},GridLines->{Table[0.91*(i-1),{i,3,5}],Automatic}]



求出角度的平均值

NIntegrate[theta[x],{x,0,18.2}]/18.2//N

求得角度的平均值约为0. 626023

```
0.0549451 NIntegrate[ArcCos[(0.5

                                  2                      2
    (-58.0644 + (9.45 - 0.34202 x)  + (-1.83 + 0.34202 x)  +

                            2
      2. (2.74 + 0.939693 x) )) /

                          2                      2
   (Sqrt[(9.45 - 0.34202 x)  + (2.74 + 0.939693 x) ]

                            2                       2
    Sqrt[(-1.83 + 0.34202 x)  + (2.74 + 0.939693 x) ])],

  {x, 0, 18.2}]
```

求得角度的最小值为约0. 379098

```
theta[18.2]
                            Pi  2
ArcCos[(-58.0644 + 2 (2.74 + 18.2 Cos[--])  +
                            9

                 Pi  2                 Pi  2
  (9.45 - 18.2 Sin[--])  + (-1.83 + 18.2 Sin[--]) ) /
                 9                     9

                    Pi  2               Pi  2
 (2 Sqrt[(2.74 + 18.2 Cos[--])  + (9.45 - 18.2 Sin[--]) ]
                    9                   9

                   Pi  2                Pi  2
  Sqrt[(2.74 + 18.2 Cos[--])  + (-1.83 + 18.2 Sin[--]) ])]
                   9                    9
```

试验结论

1. 第四排的座位最佳
2. θ 在x的变化区间[0，1.82]上的平均值为 0.626023

教堂顶部曲面面积的计算方法

(1)为了计算椭球面积，我们先定义椭球的参数方程：

In[1]:=

```
x = (30.6) * Sin[u] * Sin[v];
y = (29.6) * Sin[u] * Cos[v];
z = (30.) * Cos[u];
```

其中，0≤u≤0.5Pi,0≤v≤2Pi

然后，我们再定义x,y,z关于u,v的偏导数：

In[4]:=

```
xu = D[x, u];
xv = D[x, v];
yu = D[y, u];
yv = D[y, v];
zu = D[z, u];
zv = D[z, v];
```

根据参数方程求曲面积分的算法，将其化为重积分计算得半椭球面的面积

In[10]:=

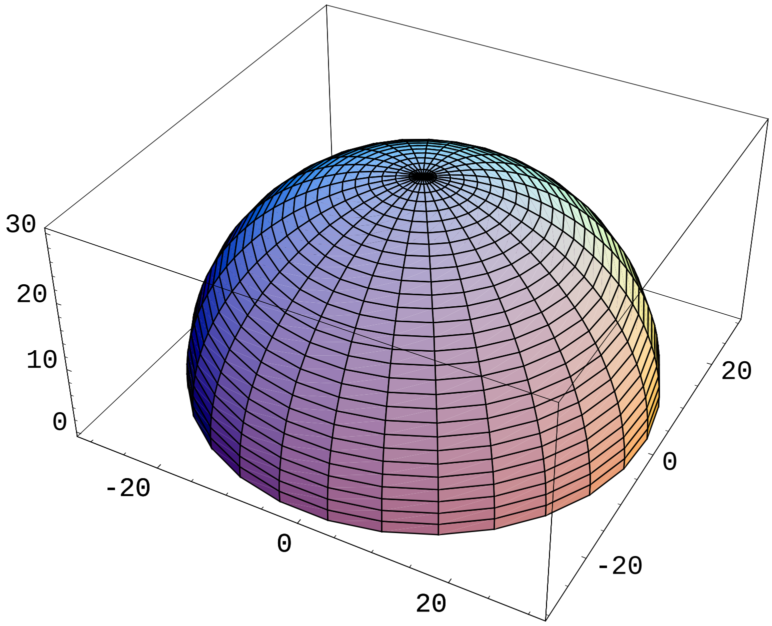
```
f[u_, v_] := Sqrt[(yu * zv - yv * zu)^2 + (zu * xv - zv * xu)^2 + (xu * yv - xv * yu)^2]
NIntegrate[f[u, v], {u, 0, 0.5 Pi}, {v, 0, 2 Pi}]
```

Out[11]=

```
5679.81
```

作图，得如下图形

In[12]:=
```
ParametricPlot3D[{(30.6) * Sin[u] * Sin[v], (29.6) * Sin[u] * Cos[v], (30.) * Cos[u]},
 {u, 0, 0.5 Pi}, {v, 0, 2 Pi}]
Clear[x, y, z, u, v]
```



Out[12]=
```
- Graphics3D -
```

(2)因为该图形关于**z**轴对称，所以，先定义该图形的**1/24,**
也就是**0≤u≤Pi/2,0≤v≤Pi/12**时的参数方程，以及**x,y,z**关于
u,v的偏导，这样，就可以去除原参数方程中的绝对值符
号，避免由此产生的不可运算的问题。

In[14]:=
```
x = r * Sin[u] * (1 + (0.1) * Sin[6 v]) * Cos[v];
y = r * Sin[u] * (1 + (0.1) * Sin[6 v]) * Sin[v];
z = r * Cos[u];
r = 30;
xu = D[x, u];
xv = D[x, v];
yu = D[y, u];
yv = D[y, v];
zu = D[z, u];
zv = D[z, v];
```

根据曲面面积的算法，得该曲面面积的1/24为

In[24]:=
```
f[u_, v_] := Sqrt[(yu * zv - yv * zu)^2 + (zu * xv - zv * xu)^2 + (xu * yv - xv * yu)^2]
NIntegrate[f[u, v], {u, 0, 0.5 Pi}, {v, 0, (1. / 12) * Pi}]
```

Out[25]=
```
268.941
```

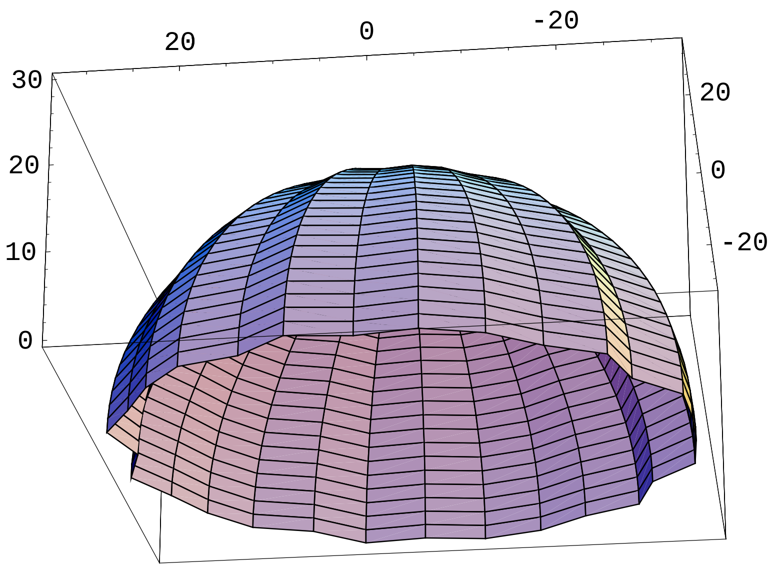
于是，该曲面面积为

In[26]:=
```
%25 * 24
Clear[x, y, z, u, v]
```

Out[26]=
```
6454.59
```

作该曲面图形

In[28]:=
```
x = r Sin[u] (1 + 0.1 Abs[Sin[6 v]]) Cos[v];
y = r Sin[u] (1 + 0.1 Abs[Sin[6 v]]) Sin[v];
z = r Cos[u];
r = 30.0;
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {u, 0., 0.5 Pi},
 {v, 0., 2 Pi}, ViewPoint -> {-0.781, 6.177, -2.633}]
```



Out[32]=
```
- Graphics3D -
```

因为消耗的金箔比实际用量多1.6%所以实际金箔用量可覆盖的面积为

In[33]:=
```
%26 * 1.016
```

Out[33]=
```
6557.87
```

实验四：世界人口增长情况估计

1.根据马尔萨斯人口模型可以得到：**dn=h*dt** [其中，**n** 表示人口数量，**h** 是比例常数]解这个微分方程，可得：**n=n0*E^(h*t)**，**n0** 表示初始人口数量。下面我们用最小二乘法来逼近函数。

```
f1[x_]:=n0*Exp[h*t]
a=h Log[E];b=Log[n0];
xy={{0,2972.},{1,3061.},{2,3151.},{3,3213.},{4,3234.},
{5,3285.},{6,3356.},{7,3420.},{8,3483.}};
m[a_,b_]:=Sum[(a xy[[k,1]]+b-Log[10,xy[[k,2]]])^2,
{k,1,9}]
Solve[{D[m[a,b],a]==0,D[m[a,b],b]==0},{h,n0}]
```

运行结果为:

```
{{h -> 0.00807465, n0 -> 32.3936}}
```

于是，可以得出人口函数 **f[t]**,并求出 **2020** 年的人口数目，

```
f1[t_]:=3239.39*Exp[0.00807465 t]
Solve[y-3239.39*Exp[0.00807465 60]==0,y]
```

运行结果为:

```
{{y -> 5258.6}}
```

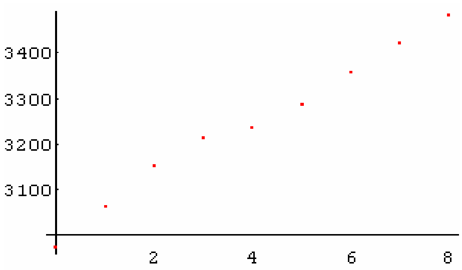
所以,该模型模拟的 **2020** 年时的人口为 **5258.6** 百万.

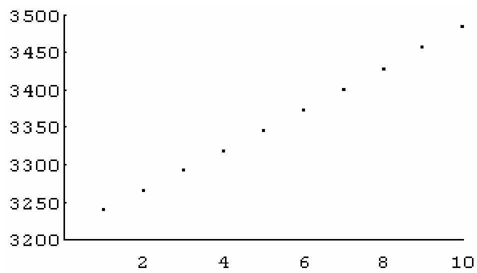
下面我们作出函数图象与已给的数据进行比较.

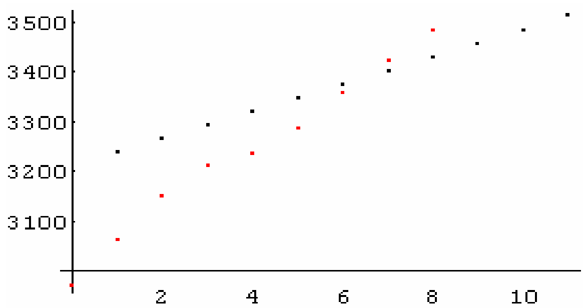
```
data=Table[f1[i],{i,0,10}]
t1=ListPlot[xy,PlotStyle->RGBColor[1,0,0]]
t2=ListPlot[data,PlotRange->{{0,10},{3200.00,3500.00}}];
Show[t1,t2]
```

运行,得:

```
{3239.39, 3265.65, 3292.13, 3318.82, 3345.73, 3372.85, 3400.2, 3427.76,
3455.55, 3483.57, 3511.81}
```







接着,我们列一个表来比较拟合的数据的误差:

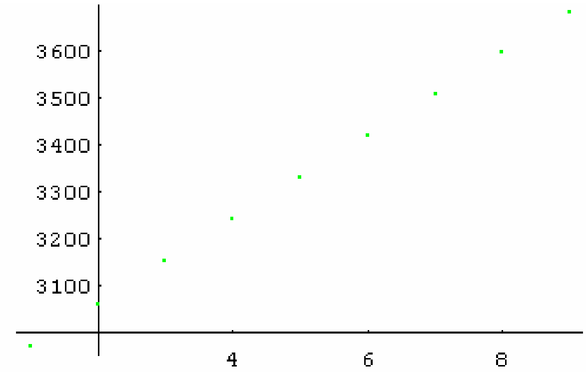
年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
实际人口/百万	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483
模拟人口/百万	3239.39	3265.65	3292.13	3318.82	3345.73	3372.85	3400.2	3427.76	3455.55
误差	267.39	204.65	141.1	105.82	111.73	87.85	44.2	7.76	-27.45

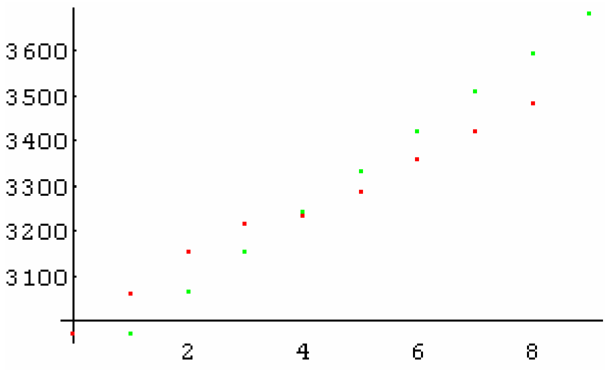
2.根据 **Logistic** 方程:

f2[t_]:=a/((a/N0-b)*E^(-a t)+b)

经过多次的与实际数据的逼近,我们可以得出经验数值 **a->0.06,b->10^(-5)**.于是我们作出逼近函数的点图并与实际数据进行比较:

a=0.06;b=10^(-5);N0=2972.;
data=Table[f2[t],{t,0,8}];
t3=ListPlot[data,PlotStyle->RGBColor[0,1,0]]
Show[t1,t3]





我们再求出 **Logistic** 方程所与预测的 **2020** 年世界人口:

Solve[y-f[60]==0,y]

运行,得:

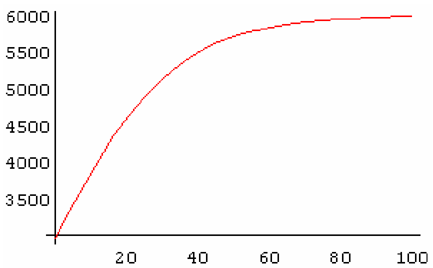
{{y -> 5837.49}}

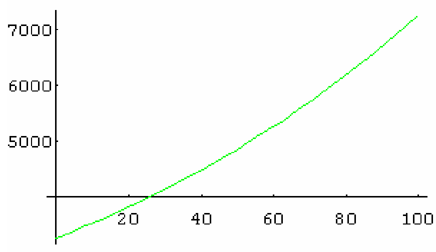
即 **2020** 年世界人口为 **5837.49** 百万.

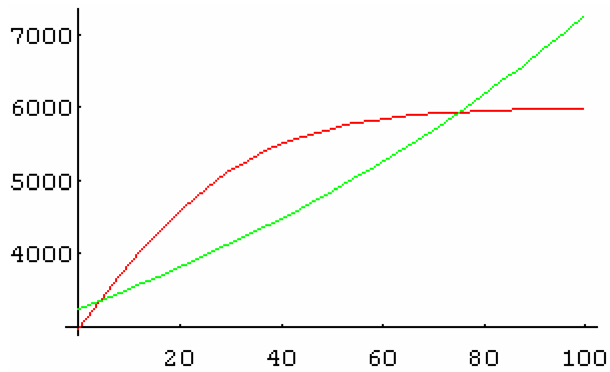
3.我们来比较 1 与 2 的结果,键入:

f1[t_]:=a/((a/n0-b)*E^(-a*t)+b)
a=0.06;b=10^(-5);n0=2972.;
f2[t_]:=3239.39*Exp[0.00807465 t]
w1=Plot[f1[t],{t,0,100},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]]
w2=Plot[f2[t],{t,0,100},PlotStyle->RGBColor[0,1,0]]
Show[w1,w2]

运行,得:







✧ 从上面的图象可以看出:在做近期预测时,马尔萨斯方程比较准确;但在长期预测中, 马尔萨斯方程预测的结果越来越趋向于无穷大,因为人口不可能无限制增长下去，所以在长期预报中，显然 Logistic 方程比马尔萨斯方程更加合理。世界人口将趋向于一个确定的值.

环境工程:
陈金銮,栾永翔,
李雪亭,唐银健

数学实验

一、问题

问题 1

在相距100m的两个塔（高度相等的点）上悬挂一根电缆，允许电缆在中间下垂10m.

2 试求出该电缆的曲线表达式，并作出其图形；

3 用近似计算方法计算空中电缆的长度；

4 用弧长公式计算电缆长度，并与②的结果比较.

问题 2

某旅游景点从山脚到山顶有一缆车索道，高差为380m，采用循环单线式修建. 缆绳悬挂在下站到上站的行程中的 8 个铁塔上，这 8 个铁塔依山势走向而距离不等，从下站到第一铁塔的水平距离为d_0，高差为h_0，从第一铁塔到第二铁塔的水平距离为d_1，高差为h_1，...
从第八个铁塔到上站的水平距离为d_8，高差为h_8. 具体数据见下表：

d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
220	200	140	120	100	120	140	200	220
h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
50	45	40	38	34	38	40	45	50

每一段缆绳下垂的最低点不低于两端铁塔最低塔顶悬挂绳处1M. 试估算整个索道工程所用的缆绳总长度，并作出其图形.

二、求解过程

求解问题 1

1．分析求解该绳索在平衡状态时所呈曲线的方程并作出其图形:

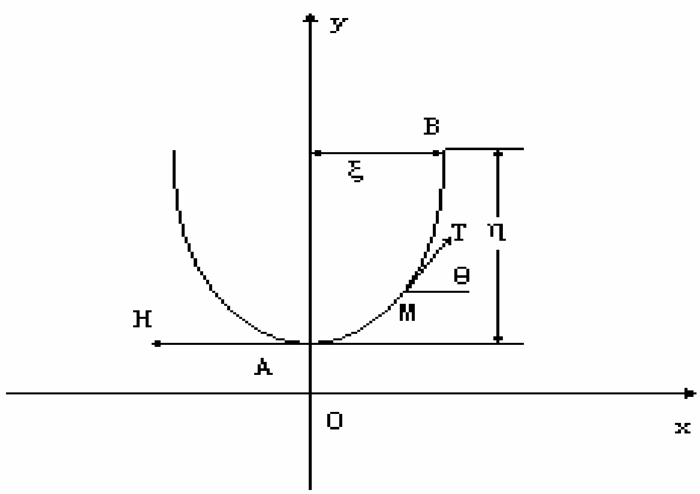


图１－１

如图１－１所示，设绳索的最底点为Ａ．取y轴通过点Ａ铅直向上，并在绳索所在的平面内再取x轴，使x轴与y轴构成平面直角坐标系，并使｜ＯＡ｜等于某定值.

设绳索曲线的方程为y=y(x). 考察绳索上点Ａ与另一点Ｍ（ｘ，ｙ）间的一段弧ＡＭ的受力情况．设这段弧的长度为s．s是x 的函数：s=s(x). 假定单位长绳索的重量为ρ，则弧ＡＭ的

重量为ρs．由于绳索近似柔软，因而在点Ａ处的张力沿水平切线方向，设其大小为Ｈ；在点Ｍ处的张力沿该点处的切线方向，与水平线成θ角，设其大小为Ｔ．因为作用于弧段ＡＭ的外力相互平衡，把作用于弧ＡＭ上的力沿铅直及水平两方向分解，得：

$T\sin\theta=\rho s$

$T\cos\theta=H$

两式相除得：

$\tan\theta=\frac{1}{a}s \quad (a=\frac{H}{\rho})$

因为tanθ=y'，上式即：

$y'=\frac{1}{a}s$

对此式两端关于x求导，并由 $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$ ，得：

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \qquad (4)$$

这是y=y(x)应满足的微分方程.

取原点Ｏ到Ａ的距离为定值a，即｜ＯＡ｜＝a，则初值条件为：

$y|_{x=0}=a$

$y'|_{x=0}=0$

求解方程(4)，得：

$$y=a\cosh\frac{x}{a} \qquad (5)$$

求得a后即可得问题１中电缆的曲线方程.

由题意知a满足以下关系：

$$a+\eta=a\cosh\frac{\xi}{a}$$

在问题１中ξ=50，η=10，得

$$a+10=a\cosh\frac{50}{a}$$

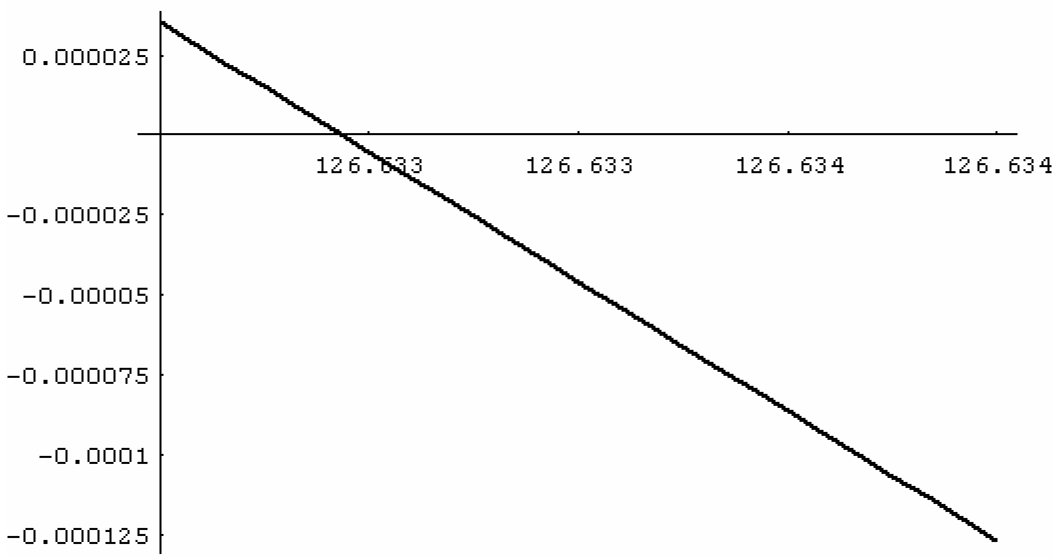
解此方程，在Mathematica中键入：

```
f[x_]:=x+10-x*Cosh[50/x]
a0=120.0;b0=130.0;delta=10^(-3);k0=100;
a=a0;b=b0;
Do[x=(a+b)/2;
  Print[x];
  If[f[x]==0,Break[],
  If[f[x]*f[b]<0,a=x,b=x]];
  If[Abs[b-a]<delta,Break[],If[k==k0,Print[failed]]],{k,k0}]
```

解得：

a=126.633

如图所示：



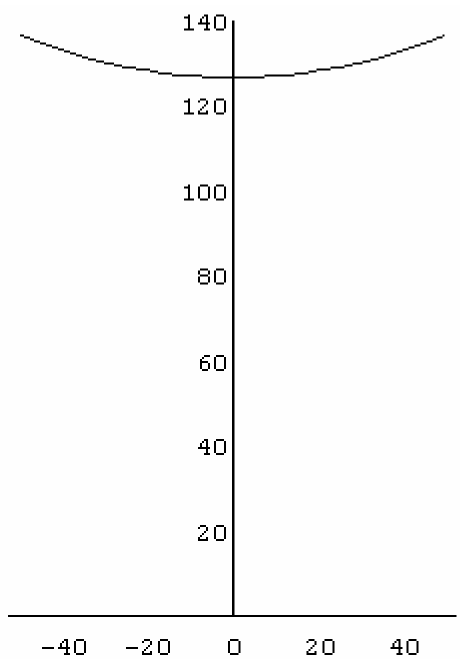
则问题 1 中的曲线方程为：

$$y=126.633\times\cosh\frac{x}{126.633}$$

用Mathematica作出其图形，键入：

```
Plot[Cosh[x/126.633]*126.633,{x,-50,50},PlotRange->{0,140},AspectRatio->Automatic
]
```

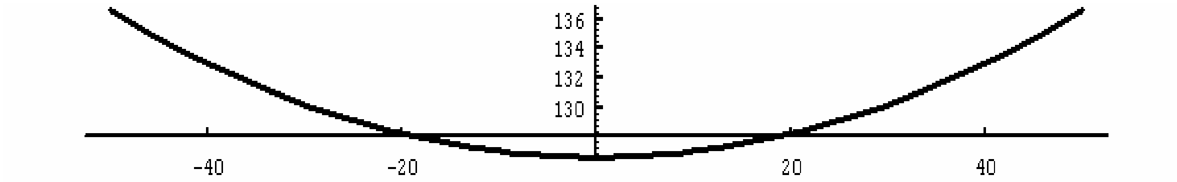
得图形如下：



进一步观察图形，键入：

```
Plot[Cosh[x/126.633]*126.633,{x,-50,50},AspectRatio->Automatic]
```

得图形如下：



2 *算空中电缆的长度:*

用弧长公式计算电缆长度

已知弧长公式:

s=$\int_a^b \sqrt{1+y'^2\,dx}$

问题 1 中电缆的曲线方程为:

y=$a\cosh\frac{x}{a}$ （a=126.633)

于是:

s=2$\int_0^b \cosh\frac{x}{a}dx$=2$a\left[\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b$=2$a\sinh\frac{b}{a}$

而b=50，a=126.633

在Mathematica中键入:

2*126.633*Sinh[50/126.633]

得:

102.619

即电缆的长度约为102.619m.

求解问题2

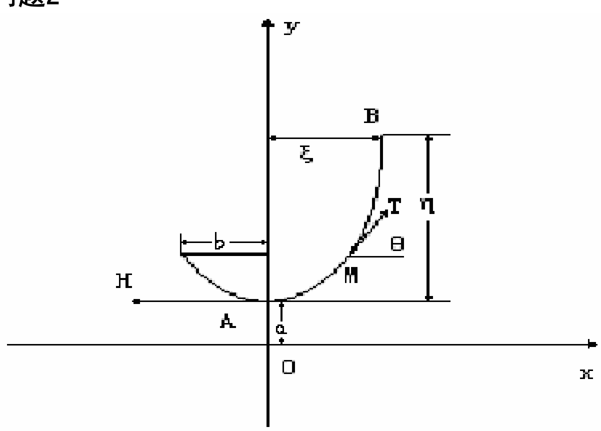


图 2 — 1

如图 2 — 1 所示，每一段绳下垂的最低点低于两端铁塔最低塔顶处 1 m. 又有问题 1 知，该悬链线方程为：y=$a\cosh\frac{x}{a}$. 则当x=b时，y=a+1；当x=ξ时，y=a+η.

下面求下站到第一铁塔的缆绳长度（其他可类似求得）:

假设两点（下站与第一铁塔顶）间距离为d，高差为h. 则由图知，d=ξ+b，h=η-1.

于是得方程组：

$a+1=a\cosh\frac{b}{a}$ （6）

$a+h+1=a\cosh\frac{d-b}{a}$ （7）

将问题 2 数据表中的数据代入方程组，可求得 a，b，进而通过弧长公式求缆绳的长度.
具体过程（以下站与第一铁塔为例）如下：

1 联立(6)(7)得：

$$a+h+1=a\cosh\frac{d-a\,\mathrm{arccos}\,h\frac{a+1}{a}}{a} \quad (8)$$

4 将h=50，d=220代入(8)并解此方程，键入：

```
f[x_]:=x*Cosh[(220-x*ArcCosh[1+(1/x)])/x]-x-51;
a0=372.;b0=373.;
delta=10^(-3);
k0=100;
a1=a0;b1=b0;
Do[x=(a1+b1)/2;
Print[x];
If[f[x]==0,Break[],
If[f[x]*f[b1]<0,a1=x,b1=x]];
If[Abs[b1-a1]<delta,Break[],If[k==k0,Print[failed]]],
{k,k0}]
```

5 解得：a=372.321；b=27.282

6 求缆绳长：

$$s=\int_{a1}^{a2}\cosh\frac{x}{a}dx=a\left[\sinh\frac{x}{a}\right]_{a1}^{a2}=a\left(\sinh\frac{a2}{a}-\sinh\frac{a1}{a}\right) \quad (9)$$

a1=－b，a2=d－b代入(9)得：

s=228.746m

10 重复步骤 1 、 2 、 3 、 4 ，求得各点之间的缆绳长，并列表如下：

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
228.746	212.001	145.628	129.291	108.973	129.291	145.628	212.001	228.746

将所有绳长相加得缆绳总长度为：

s=1540.305m

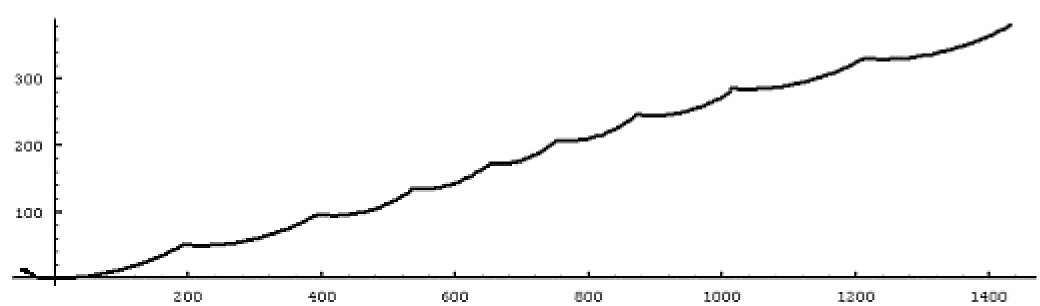
即所用缆绳的总长度约为1540.305m

作出缆绳架设图形如下，键入：

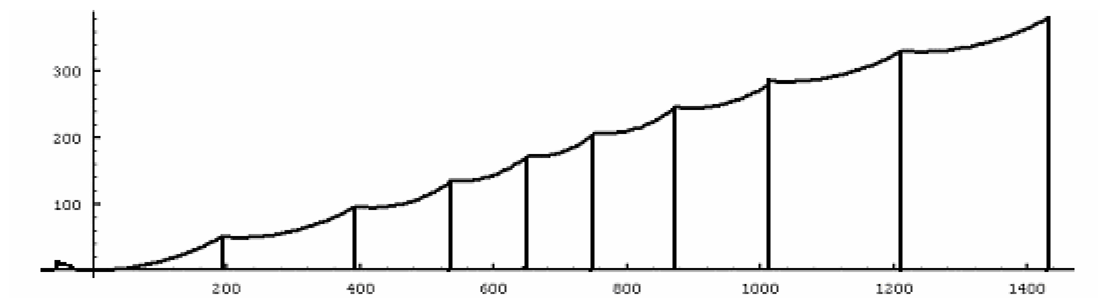
d0=220；h0=50
d1=200；h1=45
d2=140；h2=40
d3=120；h3=38
d4=100；h4=34
d5=120；h5=38

```
d6=140；h6=40
d7=200；h7=45
d8=220；h8=50
a0=372.321；b0=27.282
a1=336.7；b1=25.9435
a2=184.423；b2=25.9435
a3=142.427；b3=16.8678
a4=109.167；b4=14.7649
a5=142.427；b5=16.8678
a6=184.423；b6=25.9435
a7=336.7；b7=25.9435
a8=372.321；b8=27.282
p0=Plot[a0*Cosh[x/a0]-a0,
    {x,-b0,d0-b0}]
p1=Plot[a1*Cosh[(x-(d0-b0)-b1)/a1]-a1+h0,
    {x,d0-b0,d0-b0+d1}]
p2=Plot[a2*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-b2)/a2]-a2+h0+h1,
    {x,d0-b0+d1,d0-b0+d1+d2}]
p3=Plot[a3*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-d2-b3)/a3]-a3+h0+h1+h2,
    {x,d0-b0+d1+d2,d0-b0+d1+d2+d3}]
p4=Plot[a4*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-d2-d3-b4)/a4]-a4+h0+h1+h2+h3,
    {x,d0-b0+d1+d2+d3,d0-b0+d1+d2+d3+d4}]
p5=Plot[a5*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-d2-d3-d4-b5)/a5]-a5+h0+h1+h2+h3+h4,
    {x,d0-b0+d1+d2+d3+d4,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5}]
p6=Plot[a6*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-d2-d3-d4-d5-b6)/a6]-a6+h0+h1+h2+h3+h4+h5,
    {x,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5+d6}]
p7=Plot[a7*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-d2-d3-d4-d5-d6-b7)/a7]-a7+h0+h1+h2+h3+h4+h5+h6,
    {x,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5+d6,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7}]
p8=Plot[a8*Cosh[(x-(d0-b0)-d1-d2-d3-d4-d5-d6-d7-b8)/a8]-a8+h0+h1+h2+h3+h4+h5+
        h6+h7,
    {x,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7,d0-b0+d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7+d8}]
Show[p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,AspectRatio->Automatic]
```

得图形：（以下站到第一铁塔的一段的最低点为图形原点）



以竖线表示上下站与铁塔，作图如下：



即绳索悬挂的近似图形.

曹明　　　　2003年6月16日