高等结构动力学

——之第二讲

单自由度系统强迫振动

主讲教师：葛耀君 教授、博士

1.简谐荷载作用

荷载形式： $$p(t) = p_0 \sin \overline{\omega} t$$

1.1无阻尼系统

振动方程： $$m\ddot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin \overline{\omega} t$$

齐次解 (Complementary Solution)：

$$v_c(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

特殊解 (Particular Solution)：

$$v_p(t) = C\sin\overline{\omega} t$$

$$C = \frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{1-\left(\overline{\omega}/\omega\right)^2}\right]$$

1.1 无阻尼系统(续)

通解 (General Solution)：

$$v(t) = v_c(t) + v_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C\sin\overline{\omega} t$$

初始条件 (Initial Conditions)：

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0$$

$$A = 0\,, \qquad B = -\frac{p_0\beta}{k}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]$$

无阻尼系统通解：

$$v(t) = \frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{1-\beta^2}\right](\sin\overline{\omega} t - \beta\sin\omega t)$$

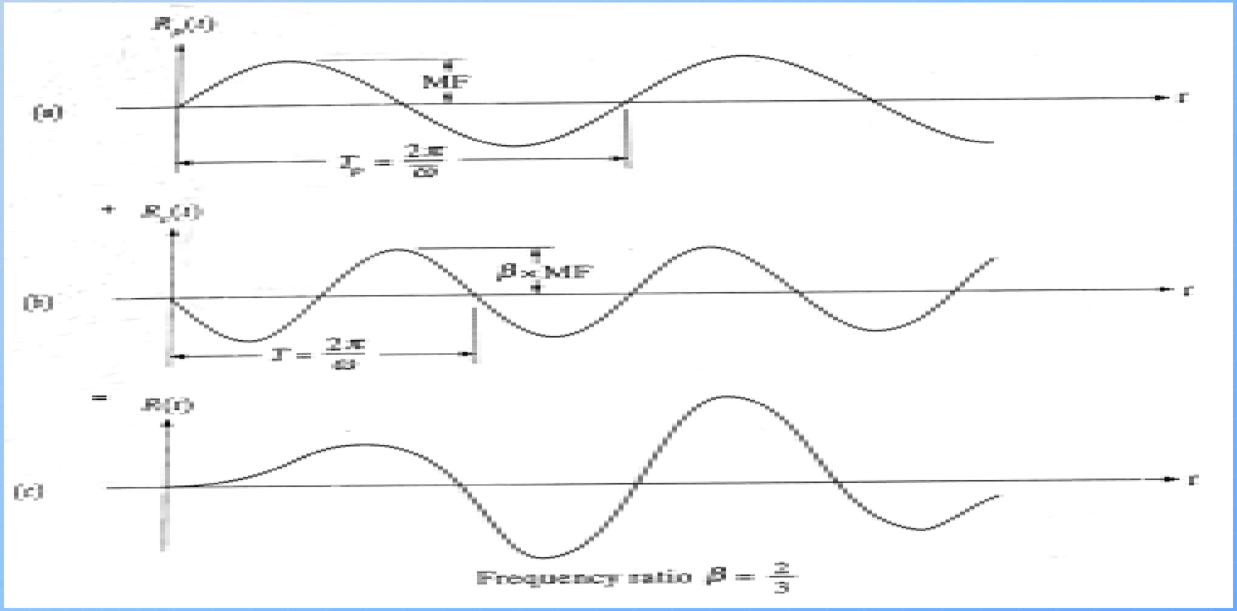
1.1 无阻尼系统(续)

$\dfrac{p_0}{k}$ ——静力荷载p_o 作用下的位移

$\dfrac{1}{1-\beta^2}$ ——简谐荷载放大系数（MF）

$\sin \overline{\omega} t$ ——简谐荷载引起的稳态响应分量(steady-state response)

$\beta \sin \omega t$ ——初始条件控制的自由振动瞬态响应分量 (transient response



无阻尼系统简谐荷载作用下的位移响应

1.2 粘滞阻尼系统

振动方程：$\ddot{v}(t)+2\xi\omega\dot{v}(t)+\omega^2 v(t)=\dfrac{p_0}{m}\sin\overline{\omega}t$

齐次解： $v_c(t)=\left[A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t\right]\exp(-\xi\omega t)$

特殊解： $v_p(t)=G_1\cos\overline{\omega}t+G_2\sin\overline{\omega}t$

$$G_1=\frac{p_0}{k}\left[\frac{-2\xi\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}\right]$$

$$G_2=\frac{p_0}{k}\left[\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}\right]$$

$$\beta=\overline{\omega}/\omega$$

通 解：

$$v(t)=\left[A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t\right]\exp(-\xi\omega t)$$

$$+\frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}\right]\left[\left(1-\beta^2\right)\sin\overline{\omega}t-2\xi\beta\cos\overline{\omega}t\right]$$

1.2 粘滞阻尼系统(续)

稳态简谐响应

形式①：$v_p(t)=\frac{p_0}{k}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}\right]\left[\left(1-\beta^2\right)\sin\overline{\omega}t-2\xi\beta\cos\overline{\omega}t\right]$

形式②：$v_p(t)=G\exp(i\overline{\omega}t)$

$$G=\frac{p_0}{k}\left[\frac{\left(1-\beta^2\right)-i(2\xi\beta)}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}\right]$$

形式③：$v_p(t)=\rho\sin(\overline{\omega}t-\theta)$

$$\rho=\frac{p_0}{k}\left[\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}\Rightarrow D=\left[\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right]\qquad(0<\theta<\pi)$$

1.2 粘滞阻尼系统(续)

粘滞阻尼系统共振现象

① $\xi = 0$ ， $D = \dfrac{1}{1-\beta^2}$

② $\beta = 1$ ， $D = \dfrac{1}{2\xi}$

③ $\beta \to 1$ ， 共振发生条件

④ 极值 $D_m = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ ， 条件 $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$

阻尼比测量方法:

自由振动衰减法、共振系数法、半功率谱法、能量衰减法

1.3 复刚度阻尼系统

每周能量损失：$E_D = (2\pi / \overline{\omega}) P_{avg} = 2\pi\xi m \omega \overline{\omega} \rho^2$

主要试验问题：能量损失与作用力频率无关

复刚度阻尼力：$f_D(t) = i\zeta k v(t)$

复刚度系数：$\hat{k} = k(1 + i\zeta)$

振动方程：$m\ddot{v}(t) + \hat{k}v(t) = p_0 \exp(i\overline{\omega}t)$

特殊解①：$v_p(t) = G\exp(i\overline{\omega}t)$

$$G = \frac{p_0}{k}\left[\frac{\left(1-\beta^2\right) - i\zeta}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \zeta^2}\right]$$

1.3 复刚度阻尼系统(续)

特殊解②： $v_p(t)=\bar{\rho}\exp(i\bar{\omega}t-\bar{\theta})$

$$\bar{\rho}=\frac{p_0}{k}\left[\left(1-\beta^2\right)^2+\zeta^2\right]^{-1/2}$$

$$\bar{\theta}=\tan^{-1}\left[\frac{\zeta}{\left(1-\beta^2\right)}\right]$$

两种阻尼系统的转换条件： $\zeta=2\xi\beta$

结果：

$$\hat{k}=k(1+i2\xi)$$

$$\bar{\rho}=\rho$$

$$\bar{\theta}=\theta$$

$$f_D(t)=2i\xi k\bar{\rho}\left[\exp(i\bar{\omega}t-\bar{\theta})\right]$$

$$E_D(t)=2\pi\xi m\omega^2\bar{\rho}^2$$

2. 周期荷载作用

2.1 Fourier 展开式

三角函数： $p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\overline{\omega}_n t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\overline{\omega}_n t$

$$\overline{\omega}_n=n\overline{\omega}_1=n\frac{2\pi}{T_p}$$

$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)\cos\overline{\omega}_n t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)\sin\overline{\omega}_n t dt$$

$$T_p=N\Delta t$$

$$\int_0^{T_p}q(t)dt\doteq\Delta t\left[\frac{q_0}{2}+\left(\sum_{m=1}^{N-1}q_m\right)+\frac{q_N}{2}\right]$$

2.1 Fourier 展开式(续)

$$\left.\begin{matrix} a_0 \\ a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{2\Delta t}{T_p}\sum_{m=1}^{N-1} q_m \qquad q_m = \begin{cases} \frac{1}{2}p(t_m) \\ p(t_m)\cos\overline{\omega}_n(m\Delta t) \\ p(t_m)\sin\overline{\omega}_n(m\Delta t) \end{cases}$$

指数函数：

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \exp\left(i\overline{\omega}_n t\right)$$

$$P_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_\rho} p(t)\exp\left(-i\overline{\omega}_n t\right)dt$$

$$T_p = N\Delta t$$

$$P_n = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1} p(t_m)\exp\left(-i\frac{2\pi nm}{N}\right)$$

2.2 无阻尼系统响应

正弦荷载响应：$v_n(t)=\dfrac{b_n}{k}\left[\dfrac{1}{1-\beta_n^2}\right]\sin\overline{\omega}_n t$

$$\beta_n=\overline{\omega}_n/\omega$$

余弦荷载响应：$v_n(t)=\dfrac{a_n}{k}\left[\dfrac{1}{1-\beta_n^2}\right]\cos\overline{\omega}_n t$

常量荷载响应：$v_0=a_0/k$

荷载响应叠加：$v(t)=\dfrac{1}{k}\left\{a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{1-\beta_n^2}\right]\left(a_n\cos\overline{\omega}_n t+b_n\sin\overline{\omega}_n t\right)\right\}$

2.3 粘滞阻尼系统响应

$$v(t)=\frac{1}{k}\left\{a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(1-\beta_n^2\right)^2+\left(2\xi\beta_n\right)^2}\right]\right\}$$

$$\times\left\{2\xi a_n\beta_n+b_n\left(1-\beta_n\right)^2\sin\overline{\omega}_n t\right.$$

$$\left.+\left[a_n\left(1-\beta_n\right)^2-2\xi b_n\beta_n\right]\cos\overline{\omega}_n t\right\}$$

2.4 频域分析法基本思路

步骤1：将周期荷载展开成Fourier级数

求Fourier级数的各项系数

步骤2：频率响应系数H_n

计算不同$\overline{\omega}_n$下的系数H_n

步骤3：频域响应转换到时域响应

求各模态叠加结果

3.冲击荷载作用

冲击荷载特点：作用时间短、阻尼力可忽略

3.1 正弦冲击荷载

荷载形式：

第一阶段 $(0 \le t \le t_1)$：

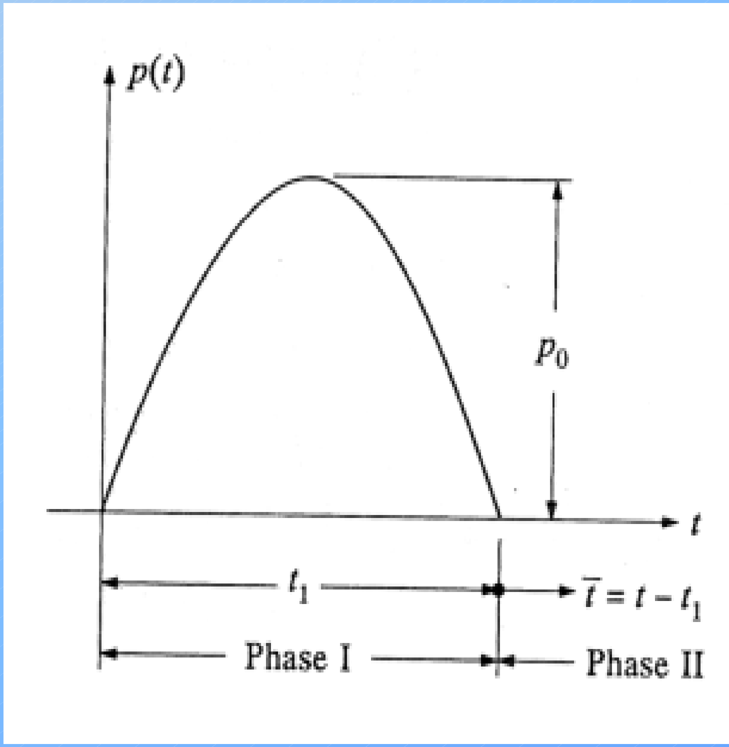
$$R(\alpha) = \frac{v(t)}{p_0/k} = \left[\frac{1}{1-\beta^2}\right]\left(\sin\pi\alpha - \beta\sin\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)$$

$$\alpha = t/t_1，\quad \beta = \overline{\omega}/\omega = T/2t_1$$

$$\beta \to 1 \quad : R(\alpha) = \frac{1}{2}(\sin\pi\alpha - \pi\alpha\cos\pi\alpha)$$

极值条件：$\alpha = \dfrac{2\beta n}{\beta \pm 1}$

极大值：$R_{\max} = 1.73 \quad (\beta = 0.5)$



正弦冲击荷载图

3.1 正弦冲击荷载(续)

第二阶段$(t > t_1)$：

$$R(\alpha)=\left[\frac{-\beta}{1-\beta^2}\right]\left\{\left(1+\cos\frac{\pi}{\beta}\right)\sin\left[\frac{\pi}{\beta}(\alpha-1)\right]+\sin\frac{\pi}{\beta}\cos\left[\frac{\pi}{\beta}(\alpha-1)\right]\right\}$$

$$\frac{\pi}{\beta}(\alpha-1)=\omega(t-t_1)$$

$\beta \rightarrow 1$ ： $R(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\cos[\pi(\alpha-1)]$

极值条件： $\beta=\dfrac{3}{2}$

极大值： $R_{max}=\left[\dfrac{-\beta}{1-\beta^2}\right]\left[2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{\beta}\right)\right]^{1/2}\approx 1.2$

3.2 矩形冲击荷载

荷载形式：

第一阶段 $(0 \le t \le t_1)$：

$$R(\alpha) = \left[1 - \cos 2\pi (\frac{t_1}{T})\alpha\right]$$

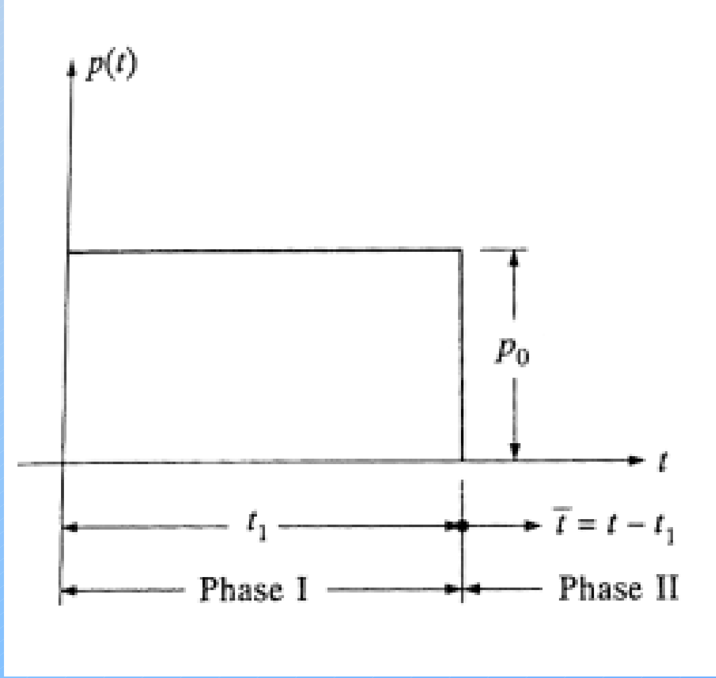
极值条件：$\frac{t_1}{T}\alpha = \frac{1}{2}$ 或 $\alpha = 1$

极大值： $R_{\max} = 2$

第二阶段 $(t > t_1)$：

$$R(\alpha) = \left(1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{T}\right)\cos\left[2\pi \frac{t_1}{T}(\alpha - 1)\right] + \sin 2\pi \frac{t_1}{T} \sin\left[2\pi \frac{t_1}{T}(\alpha - 1)\right]$$

极大值：$R_m = 2\sin \pi \frac{t_1}{T}$



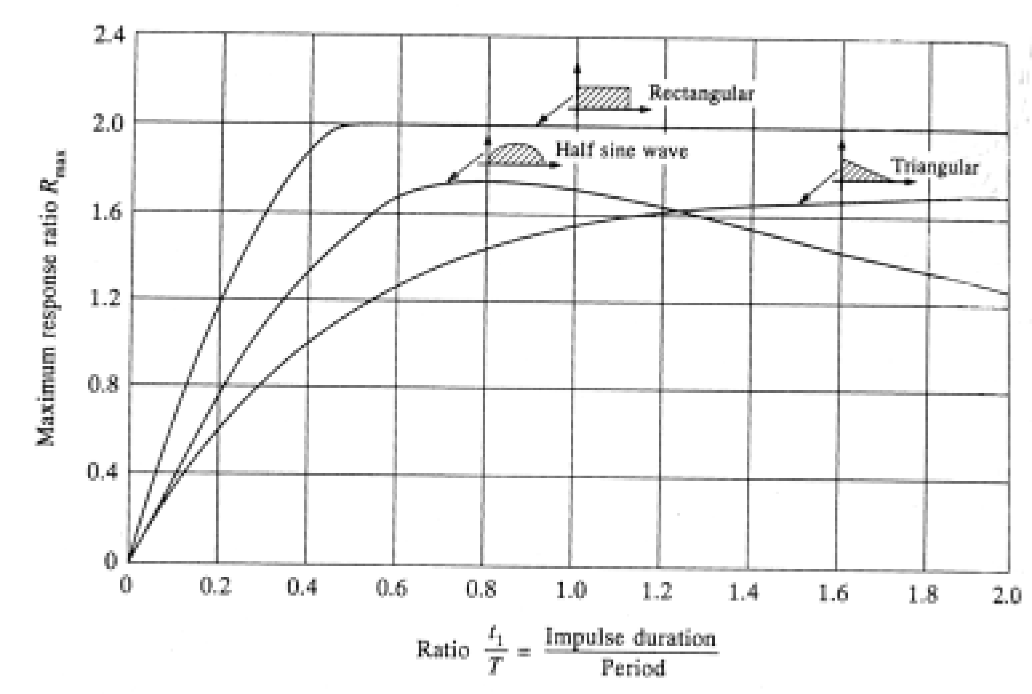
矩形冲击荷载图

3.3 三角冲击荷载

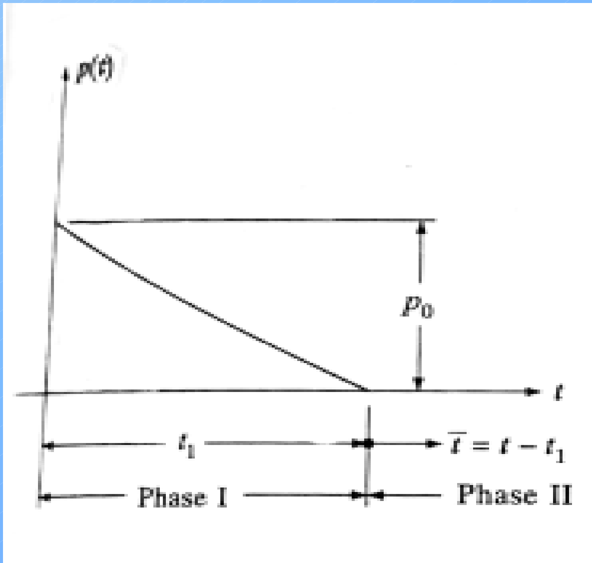
荷载形式：

第一阶段$(0 \le t \le t_1)$：

$$R(\alpha)=\frac{1}{2\pi t_1/T}\sin 2\pi\frac{t_1}{T}\alpha-\cos 2\pi\frac{t_1}{T}\alpha-\alpha+1$$



三种冲击荷载作用下的位移响应谱



三角冲击荷载图

3.4 冲击荷载近似计算

长周期作用$(t_1/T>1)$： 放大系数主要取决于荷载增大速度

矩形冲击荷载最大为2

其他冲击荷载略大于1

短周期作用$\left(t_1/T<\frac{1}{4}\right)$： 放大系数主要取决于冲量 $I=\int_0^{t_1}p(t)dt$

近似计算方法$\left(t_1/T>\frac{1}{4}\right)$：

$$m\Delta\dot{v}=\int_0^{t_1}[p(t)-kv(t)]dt\approx\int_0^{t_1}p(t)dt$$

$$\Delta\dot{v}=\frac{1}{m}\int_0^{t_1}p(t)dt$$

$$v(\bar{t})\doteq\frac{1}{m\omega}\left(\int_0^{t_1}p(t)dt\right)\sin\omega\bar{t}$$

小 结

1. 简谐荷载作用

无阻尼系统、粘滞阻尼系统、复刚度阻尼系统

齐次解＋特殊解＝通解

2. 周期荷载作用

Fourier展开、频域分析法

3. 冲击荷载作用

正弦荷载、矩形荷载、三角荷载

下周同一时间再见!