同济大学土木工程防灾国家重点实验室、桥梁工程系

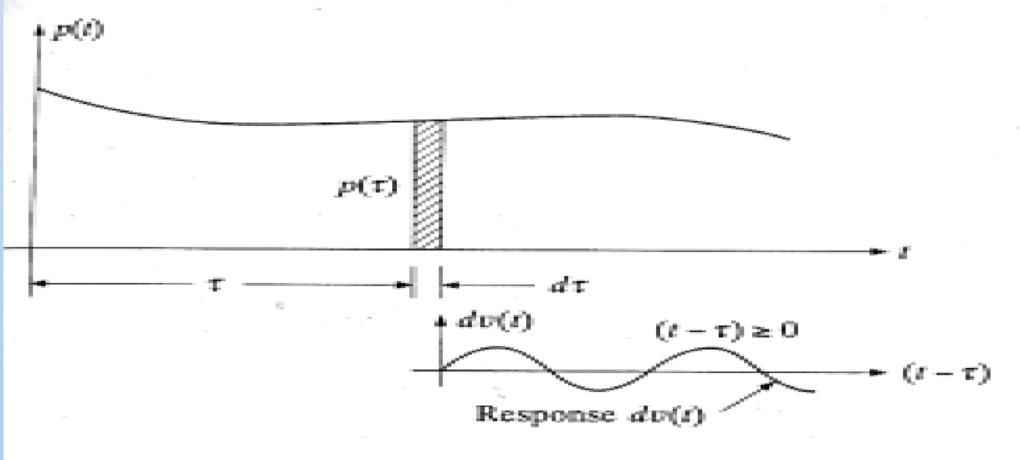
高 等 结 构 动 力 学

——之第三讲

广义单自由度叠加方法

主讲教师：葛耀君 教授、博士

1 时域方法(Time-Domain Method)



Duhamel 积分图式(无阻尼)

1.1 无阻尼精确解

近似公式： $v(\bar{t}) \doteq \frac{1}{m\omega}\left(\int_0^{t_1} p(t)dt\right)\sin\omega\bar{t}$

微分公式： $dv(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega}\sin\omega(t-\tau) \qquad (t \ge \tau)$

积分公式： $v(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (t \ge 0)$

1.1 无阻尼精确解(续)

广义卷积(General Convolution Integral)：

$$v(t)=\int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (t\geq 0)$$

单位脉冲响应函数(Unit-Impulse Response Function)：

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)$$

无阻尼自由振动响应：

$$v(t)=\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\sin\omega t+v(0)\cos\omega t+\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

适用条件：

逐个冲击响应的叠加

1 时域方法(续)

1.2 有阻尼精确解

微分公式：

$$dv(t)=\left[\frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D}\sin\omega_D(t-\tau)\right]\exp[-\xi\omega(t-\tau)] \qquad (t\geq\tau)$$

积分公式：

$$v(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\sin\omega_D(t-\tau)\exp[-\xi\omega(t-\tau)]d\tau \qquad (t\geq 0)$$

单位脉冲响应函数：

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_D}\sin\omega_D(t-\tau)\exp[-\xi\omega(t-\tau)]$$

1 时域方法(续)

1.3 无阻尼数值解

和差公式：$\sin\omega(t-\tau)=\sin\omega t\cos\omega\tau-\cos\omega t\sin\omega\tau$

积分公式：$v(t)=\dfrac{1}{m\omega}\displaystyle\int_0^t p(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$

$$=\sin\omega t\left[\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]-\cos\omega t\left[\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]$$

$$=\overline{A}(t)\sin\omega t-\overline{B}(t)\cos\omega t$$

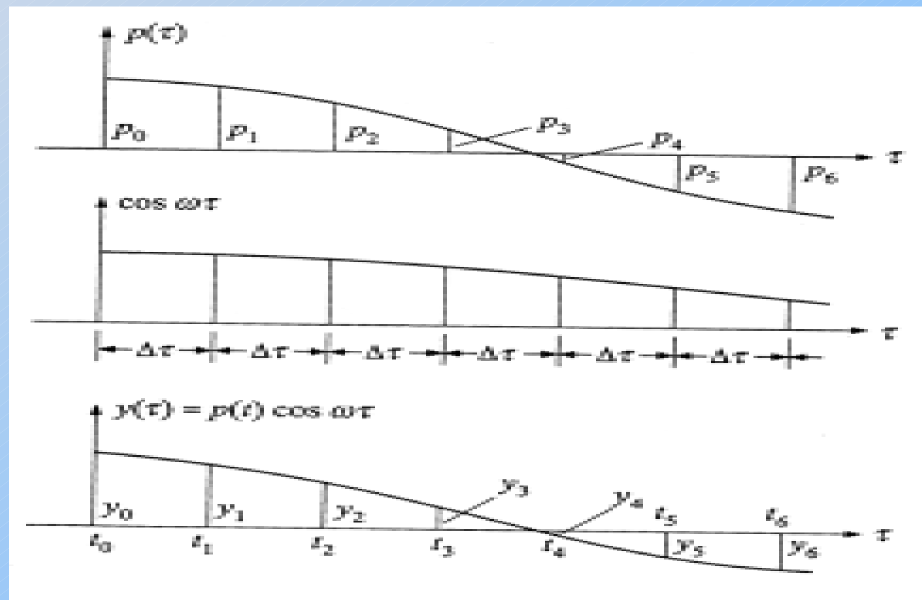
积分函数：

$$\overline{A}(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$\overline{B}(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

1.3 无阻尼数值解(续)

数值积分函数： $y(\tau) \equiv p(\tau)\cos\omega t$



Duhamel 数值积分图

数值积分计算公式：

矩形公式： $$\bar{A}_N = \frac{\Delta\tau}{m\omega}\left[y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1}\right]$$

曲边梯形： $$\bar{A}_N = \frac{\Delta\tau}{2m\omega}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{N-1} + y_N\right]$$

二次曲线： $$\bar{A}_N = \frac{\Delta\tau}{\quad}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{N-1} + y_N\right]$$

1.3 无阻尼数值解(续)

数值积分递推计算公式(以 $\overline{A}_N$ 为例)：

矩形公式： $$\overline{A}_N = \overline{A}_{N-1} + \frac{\Delta\tau}{m\omega}\left[y_{N-1}\right]$$

曲边梯形： $$\overline{A}_N = \overline{A}_{N-1} + \frac{\Delta\tau}{2m\omega}\left[y_{N-1} + y_N\right]$$

二次曲线： $$\overline{A}_N = \overline{A}_{N-1} + \frac{\Delta\tau}{3m\omega}\left[y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N\right]$$

$\overline{B}_N$ 数值积分可以采用类似方法

无阻尼数值解：

$$v_N = \overline{A}_N \sin\omega t_N - \overline{B}_N \cos\omega t_N$$

1 时域方法(续)

1.4 有阻尼数值解

积分公式：$v(t)=A(t)\sin\omega_D t-B(t)\cos\omega_D t$

积分函数：$A(t)=\dfrac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\dfrac{\exp(\xi\omega\tau)}{\exp(\xi\omega t)}\cos\omega_D\tau d\tau$

$$B(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)\frac{\exp(\xi\omega\tau)}{\exp(\xi\omega t)}\sin\omega_D\tau d\tau$$

数值积分递推计算公式：$v_N=A_N\sin\omega_D t_N-B_N\cos\omega_D t_N$

矩形公式：$A_N=A_{N-1}\exp(-\xi\omega\Delta\tau)+\dfrac{\Delta\tau}{m\omega_D}y_{N-1}\exp(-\xi\omega\Delta\tau)$

曲边梯形：$A_N=A_{N-1}\exp(-\xi\omega\Delta\tau)+\dfrac{\Delta\tau}{2m\omega_D}\left[y_{N-1}\exp(-\xi\omega\Delta\tau)+y_N\right]$

二次曲线：$A_N=A_{N-2}\exp(-\xi\omega\Delta\tau)$

$$+\frac{\Delta\tau}{3m\omega_D}\left[y_{N-2}\exp(-2\xi\omega\Delta\tau)+4y_{N-1}\exp(-\xi\omega\Delta\tau)+y_N\right]$$

2 频域方法

2.1 Fourier响应积分

指数展开式： $$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\exp(i\overline{\omega}_n t)$$

$$P_n=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)\exp(-i\overline{\omega}_n t)dt$$

区间等分公式：

$$\frac{1}{T_p}=\frac{\overline{\omega}_1}{2\pi}=\frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi} \qquad n\overline{\omega}_1=n\Delta\overline{\omega}=\overline{\omega}_n \qquad P_nT_p=p(i\overline{\omega}_n)$$

Fourier展开式： $$p(t)=\frac{\Delta\overline{\omega}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(i\overline{\omega}_n)\exp(i\overline{\omega}_n t)$$

$$P(i\overline{\omega}_n)=\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}}p(t)\exp(-i\overline{\omega}_n t)dt$$

2.1 Fourier响应积分(续)

Fourier积分变换：$T_p \to \infty, \quad \Delta\overline{\omega} \to d\overline{\omega}$

逆变换：$p(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(i\overline{\omega})\exp(i\omega t)d\overline{\omega}$

正变换：$P(i\overline{\omega}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\exp(-i\overline{\omega}t)dt$

有阻尼Fourier响应积分：

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\overline{\omega})P(i\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)d\overline{\omega}$$

频率响应函数：

$$H(i\overline{\omega}) = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)+i\left(2\xi\beta\right)}\right] = \frac{1}{k}\left[\frac{\left(1-\beta^2\right)-i\left(2\xi\beta\right)}{\left(1-\beta^2\right)^2+i\left(2\xi\beta\right)^2}\right]$$

2 频域方法(续)

2.2 离散Fourier变换(Discrete Fourier Transform, DFT)

数值积分：$P_n = \dfrac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)\exp(-i\overline{\omega}_n t)dt = \dfrac{1}{T_p}\int_0^{T_p} q(t)dt$

曲边梯形：$P_n = \dfrac{1}{N\Delta t}\left\{\Delta t\left[\dfrac{q_0}{2} + \left(\sum_{m=1}^{N-1} q_m\right) + \dfrac{q_N}{2}\right]\right\}$

令：$q_0 = q_N = 0,\quad \overline{\omega}_n = 2\pi n/T_p = 2\pi n/N\Delta t,\quad t_m = m\Delta t$

$$P_n = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1} p(t_m)\exp(-i\frac{2\pi nm}{N})$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \exp(i\overline{\omega}_n t)$$

$$p(t_m) = \sum_{n=-M}^{M} P_n \exp(i\frac{2\pi nm}{N}) = \sum_{n=-0}^{N-1} P_n \exp(i\frac{2\pi nm}{N})$$

2 频域方法(续)

2.3 快速Fourier变换(Fast Fourier Transform, FFT)

正变换公式：$A_n = P_n N = \sum_{m=0}^{N-1} P_m \exp(-i\frac{2\pi nm}{N})$

时间分段：$m = \frac{t_m}{\Delta t}$

频率分段：$n = \frac{\overline{\omega}_n}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{T_p \Delta\omega}$

变换运算：对于$n = 1,2,3\cdots, N-1$

有N^2次复数运算$\begin{cases} 计算量大 \\ 精度不高 \end{cases}$

快速Fourier变换＝离散Fourier变换的高效算法

2.3 快速Fourier变换(续)

FFT计算法则：

① 项数二项式表达

令：$N = 2^{\gamma}$ (γ为整数)

$$N = 1 \Rightarrow \gamma = 0,\ N = 2 \Rightarrow \gamma = 1,\ N = 3 \Rightarrow \gamma \neq \text{整数}$$

$$n = 2^{\gamma-1} n_{r-1} + 2^{\gamma-2} n_{r-2} + \cdots + n_0$$

$$m = 2^{\gamma-1} m_{r-1} + 2^{\gamma-2} m_{r-2} + \cdots + m_0$$

$$n_{r-1}, n_{r-2}, \cdots, n_0 = +1 \quad or \quad 0$$

$$m_{r-1}, m_{r-2}, \cdots, m_0 = +1 \quad or \quad 0$$

② DFT变换值

令：$W_N = \exp(-i2\pi/N)$

$$A(n_{r-1}, n_{r-2}, \cdots, n_0) = \sum^{1} \sum^{1} \cdots \sum^{1} P_0(m_{r-1}, m_{r-2}, \cdots, m_0) W_N^{nm}$$

FFT计算法则(续)

③ W_N^{nm}计算方法

$$W_N^{nm}=W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)(2^{\gamma-1}m_{r-1}+2^{\gamma-2}m_{r-2}+\cdots+m_0)}$$

$$\because\quad W_N^{a+b}=W_N^aW_N^b$$

$$\therefore\quad W_N^{nm}=W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)(2^{\gamma-1}m_{r-1})}$$

$$\times W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)(2^{\gamma-2}m_{r-2}+\cdots+m_0)}$$

$$\times\cdots\times W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)m_0}$$

$$\text{第一项}=W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)(2^{\gamma-1}m_{r-1})}$$

$$=W_N^{2^\gamma(2^{\gamma-2}n_{r-1}m_{r-1})}\times W_N^{2^\gamma(2^{\gamma-3}n_{r-2}m_{r-1})}\times\cdots$$

$$\times W_N^{2^\gamma(2n_1m_{r-1})}\times W_N^{2^{\gamma-1}(n_0m_{r-1})}$$

FFT计算法则(续)

③ W_N^{nm}计算方法

$$\because \quad W_N^{2^r} = \left[\exp(-i\frac{2\pi}{N})\right]^N = 1$$

$$\therefore \quad 第一项 = W_N^{2^{\gamma-1}(n_0 m_{r-1})}$$

$$第二项 = W_N^{2^{\gamma-2}(2n_1+n_0)m_{r-2}}$$

……

$$最后项 = W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)m_0}$$

④ DFT变换值

$$A(n_{r-1},n_{r-2},\cdots,n_0) = \sum_{m_0=0}^{1}\sum_{m_1=0}^{1}\cdots\sum_{m_{r-1}=0}^{1}\Big[p_0(m_{r-1},m_{r-2},\cdots,m_0)\times W_N^{2^{\gamma-1}(n_0 m_{r-1})}$$

$$\times W_N^{2^{\gamma-2}(2n_1+n_0)m_{r-2}} \times\cdots\times W_N^{(2^{\gamma-1}n_{r-1}+2^{\gamma-2}n_{r-2}+\cdots+n_0)m_0}\Big]$$

FFT计算法则(续)

⑤求和运算

$$\sum_{m_{r-1}=0}^{1} p_0(m_{r-1}, m_{r-2}, \cdots, m_0) W_N^{2^{\gamma-1}(n_0 m_{r-1})} = p_1(n_0, m_{r-2}, \cdots, m_0)$$

$$\sum_{m_{r-2}=0}^{1} p_1(n_0, m_{r-2}, \cdots, m_0) W_N^{2^{\gamma-2}(2n_1+n_0)m_{r-2}} = p_2(n_0, n_1, m_{r-3}, \cdots, m_0)$$

……

$$\sum_{m_0=0}^{1} p_{r-1}(n_0, n_1, \cdots, n_{r-2}, m_0) W_N^{(2^{\gamma-1} n_{r-1} + 2^{\gamma-2} n_{r-2} + \cdots + n_0) m_0} = A(n_{r-1}, n_{r-2}, \cdots, n_0)$$

⑥计算效率分析

令： $N = 1024$ ， $\gamma = 10$

$$\frac{FFT\text{计算量}}{DFT\text{计算量}} = 0.5\%$$

3 时域－频域传递函数

时域响应—Duhamel积分：

$$v(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

频域响应—Fourier变换：

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(i\overline{\omega})P(i\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)d\overline{\omega}$$

时域传递函数—单位脉动响应：

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_D}\sin\omega_D t\exp(-\xi\omega t)$$

频域传递函数—频率响应函数：

$$H(i\overline{\omega})=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)+i\left(2\xi\beta\right)}\right]$$

3 时域－频域传递函数(续)

时域与频域传递函数关系

Fourier变换对

$$H(i\overline{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-i\overline{\omega}t)dt$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)dt$$

小 结

叠加方法
- 时域方法——Duhamel积分——三种数值方法
- 频域方法——Fourier变换——快速离散Fourier变换

两种方法
- 时域传递函数——单位脉冲
- 频域传递函数——频响函数

Fourier变换对

下周同一时间再见!