高等结构动力学

——之第四讲

广义单自由度分步方法

主讲教师：葛耀君 教授、博士

1 不同方法比较

时域方法：一系列短持时荷载的叠加效应

频域方法：一系列简谐荷载的叠加效应

分步方法：不满足叠加原理的问题求解，如非线性

荷载作用和结构响应时程(history)

离散为一系列时间段(steps)

由每一时间段的初始条件进行求解

方法统一：线性结构的叠加方法与分步方法一致

2 无穷分隔精确方法(Piecewise Exact Method)

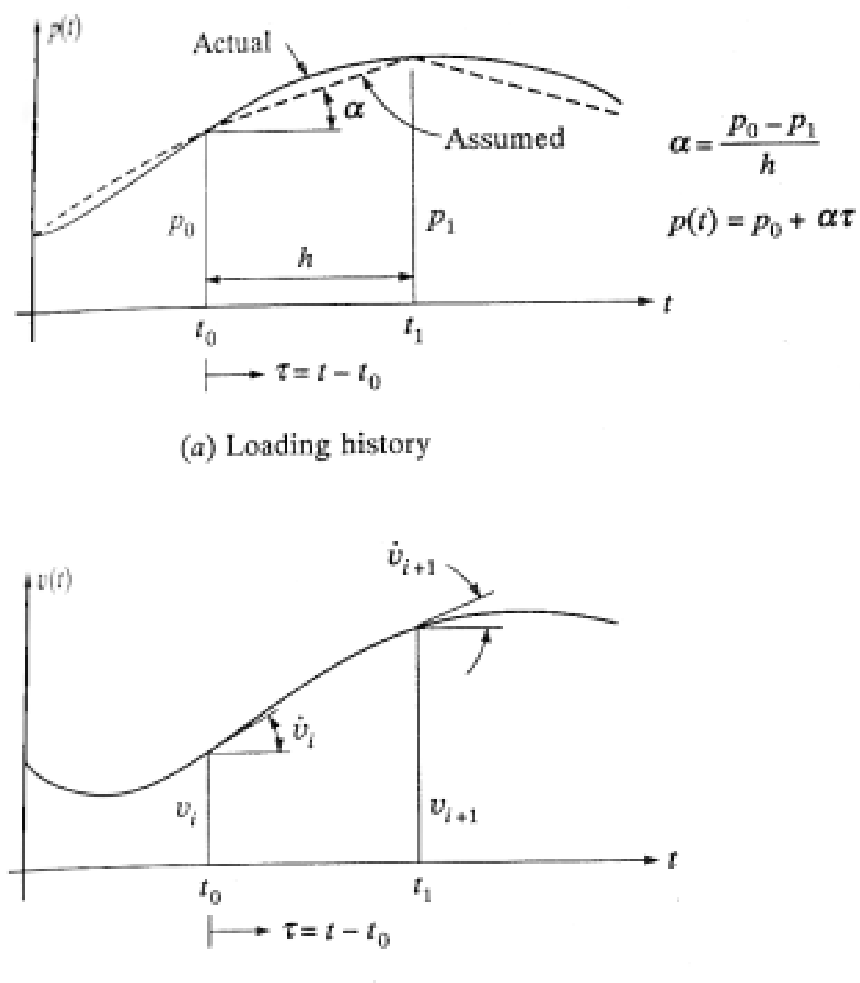
2.1 基本原理

(1) 时间离散为h

(2) 时间段内线性解

(3) 分段求取线性解

(4) 初始条件延伸



(a) Loading history

(b) Response history

2 无穷分隔精确方法(续)

2.2 求解方法

荷载线性化：

$$p(\tau) = p_0 + \alpha\tau$$

单自由度方程：

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p_0 + \alpha\tau$$

方程通解：

$$v(\tau) = v_n(\tau) + v_g(\tau)$$

$$v_h(\tau) = \exp(-\xi\omega\tau)\left(A\cos\omega_D\tau + B\sin\omega_D\tau\right)$$

$$v_p(\tau) = \frac{1}{k}\left(p_0 + \alpha\tau\right) - \frac{\alpha \cdot c}{k^2}$$

2 无穷分隔精确方法(续)

2.3 分步计算公式

位移响应表达式：

$$v(\tau)=A_0+A_1\tau+A_2\exp(-\xi\omega\tau)\cos\omega_D\tau$$
$$+A_3\exp(-\xi\omega\tau)\sin\omega_D\tau$$

速度响应表达式：

$$\dot{v}(\tau)=A_1+\left(\omega_D A_3-\xi\omega A_2\right)\exp(-\xi\omega\tau)\cos\omega_D\tau$$
$$-\left(\omega_D A_2+\xi\omega A_3\right)\exp(-\xi\omega\tau)\sin\omega_D\tau$$

初始条件确定解参数：

$$A_0=\frac{v_0}{\omega^2}-\frac{2\xi\alpha}{\omega^3}$$
$$A_1=\frac{\alpha}{\omega^2},\quad A_2=v_0-A_0$$
$$A_3=\frac{1}{\omega_D}\left[\dot{v}_0+\xi\omega A_2-\frac{\alpha}{\omega^2}\right]$$

3 分步方法评述

(1) 分步计算法本身既可以是显式解也可以是隐式解

(2) 分布计算中的关键问题是计算效率

(3) 计算误差主要来源

浮点运算、大时间步长引起非稳定解、表达式项数不够

(4) 主要误差

相位变化、频率变化、人工阻尼

4 二阶中心差分法(Second Control Difference)

初始条件：

$$m\ddot{v}_0 + c\dot{v}_0 + kv_0 = p_0$$

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{m}\left[p_0 - c\dot{v}_0 - kv_0\right]$$

二阶中心差分：

$$\dot{v}_{-1/2} \doteq \frac{v_0 - v_{-1}}{h} \quad , \quad \dot{v}_{1/2} \doteq \frac{v_1 - v_0}{h}$$

$$\ddot{v}_0 \doteq \frac{v_{1/2} - v_{-1/2}}{h} \doteq \frac{1}{h^2}(v_1 - v_0) - \frac{1}{h^2}(v_0 - v_{-1})$$

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{h^2}(v_1 - 2v_0 + v_{-1})$$

差分方程式：

$$v_1 - 2v_0 + v_{-1} = \frac{h^2}{m}\left[p_0 - c\dot{v}_0 - kv_0\right]$$

4 二阶中心差分法(续)

步长终点解：

$$v_1 = \frac{h^2}{m}\left[p_0 - c\dot{v}_0 - kv_0\right] + 2v_0 - v_{-1}$$

其中：

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2h} \quad , \quad v_{-1} = v_1 - 2h\dot{v}_0$$

$$v_1 = v_0 + h\dot{v}_0 + \frac{h^2}{2m}\left[p_0 - c\dot{v}_0 - kv_0\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{v}_0 + \dot{v}_1\right) \doteq \frac{v_1 - v_0}{h}$$

$$\dot{v}_1 \doteq \frac{2\left(v_1 - v_0\right)}{h} - \dot{v}_0$$

步长限制条件：

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{\pi} = 0.318$$

5 积分方法（Integration Method）

积分公式：

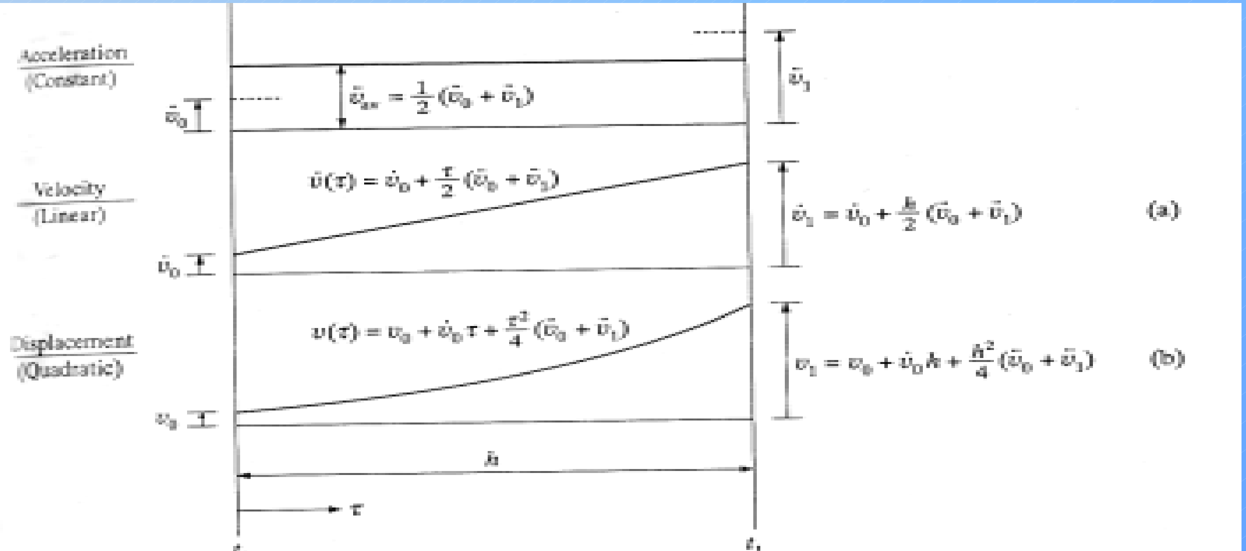
$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + \int_0^h \ddot{v}(\tau) d\tau$$

$$v_1 = v_0 + \int_0^h \dot{v}(\tau) d\tau$$

5.1 欧拉－高斯方法(匀加速度法)

基本假定：时间步长内响应加速度为常数

响应速度为线性函数、响应位移为二次函数



5 积分方法(续)

5.2 Newmark Beta法

Newmark 表达式：

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + (1-\gamma)h\ddot{v}_0 + \gamma h\ddot{v}_1$$

$$v_1 = v_0 + h\dot{v}_0 + (\frac{1}{2}-\beta)h^2\ddot{v}_0 + \beta h^2\ddot{v}_1$$

γ — 人工阻尼控制值，且 $\gamma = \frac{1}{2}$ 时，人工阻尼为0

β — 加权值

$\beta = \frac{1}{4}$ 和 $\gamma = \frac{1}{2}$，成为均加速度法

$\beta = \frac{1}{6}$ 和 $\gamma = \frac{1}{2}$，成为线加速度法

5 积分方法(续)

5.3 显式计算公式

终点加速度：

$$\ddot{v}_1 = \frac{4}{h^2}\left(v_1 - v_0\right) - \frac{4}{h}\dot{v}_0 + \ddot{v}_0$$

终点速度：

$$\dot{v}_1 = \frac{2}{h}\left(v_1 - v_0\right) - \dot{v}_0$$

t_1时刻运动方程：

$$m\ddot{v}_1 + c\dot{v}_1 + kv_1 = p_1$$

有效刚度表达式：

$$\tilde{k}_c v_1 = \tilde{p}_{1c}$$

$$\tilde{k}_c = k + \frac{2c}{h} + \frac{4m}{h^2}$$

$$\tilde{p}_{1c} = p_1 + c\left(\frac{2v_0}{h} + \dot{v}_0\right) + m\left(\frac{4v_0}{h^2} + \frac{4}{h}\dot{v}_0 + \ddot{v}_0\right)$$

5.3 显式计算公式(续)

终点加速度：

$$\ddot{v}_1 = \frac{1}{m}\left[p_1 - c\dot{v}_1 - kv_1\right]$$

线性加速度显式：

$$\tilde{k}_d v_1 = \tilde{p}_{1d}$$

$$\tilde{k}_d = k + \frac{3c}{h} + \frac{6m}{h^2}$$

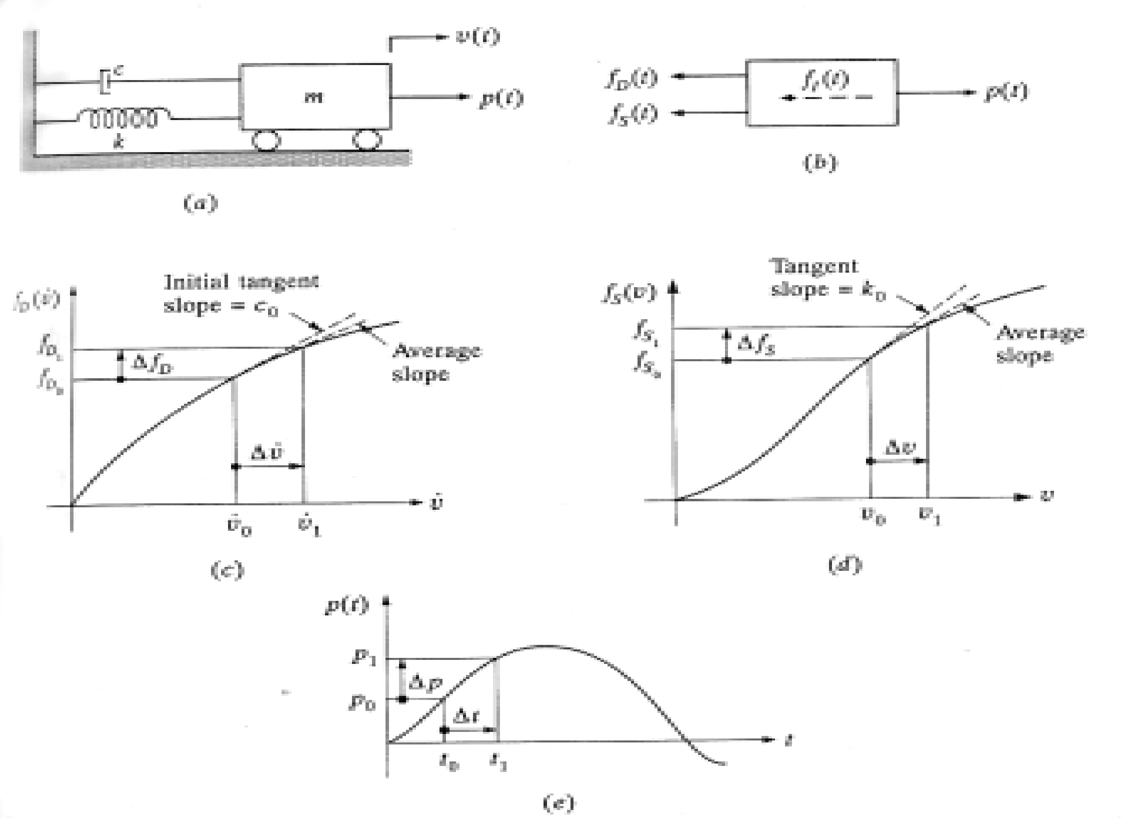
$$\tilde{p}_{1d} = p_1 + m\left(\frac{6v_0}{h^2} + \frac{6}{h}\dot{v}_0 + 2\ddot{v}_0\right) + c\left(\frac{3v_0}{k} + 2\dot{v}_0 + \frac{h}{2}\ddot{v}_0\right)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{3}{h}\left(v_1 - v_0\right) - 2\dot{v}_0 - \frac{h}{2}\ddot{v}_0$$

6 非线性分析的增量公式

上述分步计算主要解决荷载非线性

结构或材料非线性必须采用增量公式



6 非线性分析的增量公式(续)

平衡方程式：

$t = t_0$： $f_{I_0} + f_{D_0} + f_{S_0} = p_0$

$t_0 \le t \le t_1$： $f_{I_1} + f_{D_1} + f_{S_1} = p_1$

h内： $\Delta f_I + \Delta f_D + \Delta f_S = \Delta p$

$$\Delta f_I = f_{I_1} - f_{I_0} = m\Delta\ddot{v}$$

$$\Delta f_D = f_{D_1} - f_{D_0} = c(t)\Delta\dot{v}$$

$$\Delta f_S = f_{S_1} - f_{S_0} = k(t)\Delta v$$

$$\Delta p = p_1 - p_0$$

6 非线性分析的增量公式(续)

切线特性利用：

$$c(t) \doteq \left(\frac{df_D}{d\dot{v}}\right)_0 \equiv c_0$$

$$k(t) \doteq \left(\frac{df_s}{dv}\right)_0 \equiv k_0$$

平衡方程式：

$$m\Delta\ddot{v} + c_0\Delta\dot{v} + k_0\Delta v = \Delta p$$

$$\tilde{k}_d \Delta v = \Delta\tilde{p}_d$$

$$\tilde{k}_d = k_0 + \frac{3c_0}{h} + \frac{6m}{h^2}$$

$$\Delta\tilde{p}_d = \Delta p + m\left(\frac{6}{h}\dot{v}_0 + 3\ddot{v}_0\right) + c_0\left(3\dot{v}_0 + \frac{h}{2}\ddot{v}_0\right)$$

$$\Delta\dot{v} = \frac{3}{h}\Delta v - 3\dot{v}_0 - \frac{h}{2}\ddot{v}_0$$

7 线性加速度方法求解步骤

(1) 计算$t=0$时的$v_0, \dot{v}_0$，f_{D_0}，f_{S_0}，c_0，k_0等初始参数

(2) 计算初始加速度

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{m}\left[p_0 - f_{D_0} - f_{S_0}\right]$$

(3) 计算有效刚度系数 $\tilde{k}_d$ 和有效荷载增量$\Delta\tilde{p}_d$

(4) 计算位移和速度增量

(5) 计算时间终点的速度和位移

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 + \Delta\dot{v}$$

$$v_1 = v_0 + \Delta v$$

7 线性加速度方法求解步骤(续)

影响时间步长h取值的因素

a. 作用荷载的变化率

b. 非线性阻尼和刚度的复杂性

c. 结构自振周期长度 T

一般要求：

$$\frac{h}{T} \leq \frac{1}{10}$$

小 结

- 分步方法
  - 无穷分隔法
    - 分段线性荷载法
    - 二阶中心差分法
  - 积分方法
    - 匀加速度法
    - Newmark Beta法
    - 显式计算法
  - 增量方法
    - 匀加速度法
    - 线加速度法

荷载非线性

荷载与结构均为非线性

小 结

- 动力响应分析
  - 叠加方法(线性)
    - 时域方法——Duhamel积分
    - 频域方程——Fourier变换
  - 分步方法(非线)
    - 无穷分隔——二阶中心差分法
    - 积分方法——Newmark Beta法
    - 增量方法——线加速度方法

下周同一时间再见!