高等结构动力学

——之第五讲

多自由度系统动力问题

主讲教师：葛耀君 教授、博士

1. 动力学方程

1.1 节点平衡方程

$$f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} = p_1(t)$$

$$f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} = p_2(t)$$

$$f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} = p_3(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{Ii} + f_{Di} + f_{Si} = p_i(t)$$

1.2 结构平衡方程

$$\{f_I\}+\{f_D\}+\{f_S\}=\{p(t)\}$$

1.动力学方程(续)

1.3 节点弹性力

$$f_{Si} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + k_{i3}v_3 + \cdots + k_{iN}v_N$$

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \cdot \\ f_{Si} \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

1.4 节点阻尼力

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{v}_1 + c_{i2}\dot{v}_2 + c_{i3}\dot{v}_3 + \cdots + c_{iN}\dot{v}_N$$

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \cdot \\ f_{Di} \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \cdot \\ \dot{v}_i \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

1.动力学方程(续)

1.5 节点惯性力

$$f_{Ii}=m_{i1}\ddot{v}_1+m_{i2}\ddot{v}_2+m_{i3}\ddot{v}_3+\cdots+m_{iN}\ddot{v}_N$$

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \cdot \\ f_{Ii} \\ \cdot \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{i1} & c_{i2} & m_{i3} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \cdot \\ \ddot{v}_i \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

结构平衡方程：

$$[M]\{\ddot{v}(t)\}+[C]\{\dot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{p(t)\}$$

k_{ij} — 刚度系数；c_{ij} — 阻尼系数；m_{ij} — 质量系数

2.无阻尼自由振动

2.1自由振动方程

$$[M]\{\ddot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{0\}$$

令： $\{v(t)\}=\{\hat{v}\}\sin(\omega t+\theta)$

$$\{\ddot{v}(t)\}=-\omega^2\{\hat{v}\}\sin(\omega t+\theta)=-\omega^2\{v(t)\}$$

得： $-\omega^2[M]\{\hat{v}\}\sin(\omega t+\theta)+[K]\{\hat{v}\}\sin(\omega t+\theta)=\{0\}$

2.2 振动特征方程

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{\hat{v}\}=\{0\}$$

2.3 自振频率方程

$$\left\|[K]-\omega^2[M]\right\|=0$$

2.无阻尼自由振动(续)

2.4 自振振型分析

令：

$$\left[\tilde{E}^{(n)}\right]=[K]-\omega^2[M]$$

则：

$$\left[\tilde{E}^{(n)}\right]\{\hat{v}_n\}=\{0\}$$

(自动满足)

令：

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}_{1n} \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix},\quad \left[\begin{array}{c|cccc} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{13}^{(n)} & \cdots & e_{1N}^{(n)} \\ \hline e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & \cdots & e_{2N}^{(n)} \\ e_{31}^{(n)} & e_{32}^{(n)} & e_{33}^{(n)} & \cdots & e_{3N}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{N1}^{(n)} & e_{N2}^{(n)} & e_{N3}^{(n)} & \cdots & e_{NN}^{(n)} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ \hline \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \cdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.4自振振型分析(续)

振型方程分块形式：

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & \left[\tilde{E}_{10}^{(n)}\right] \\ \left[\tilde{E}_{01}^{(n)}\right] & \left[\tilde{E}_{00}^{(n)}\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \{\hat{v}_{0n}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$$\left[\tilde{E}_{01}^{(n)}\right] + \left[\tilde{E}_{00}^{(n)}\right]\{\hat{v}_{0n}\} = \{0\}$$

多余方程： $e_{11}^{(n)} + \left[\tilde{E}_{10}^{(n)}\right]\{\hat{v}_{0n}\} = 0$

振型公式： $\{\hat{v}_{0n}\} = -\left[\tilde{E}_{00}^{(n)}\right]^{-1}\left[\tilde{E}_{01}^{(n)}\right]$

注意问题： 1.振型矢量首项元素取1将影响计算精度

2.较精确的方法是将最大元素单位化

2.5 振型矩阵形式

归一化振型矢量：

$$\{\phi_n\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \\ \cdots \\ \phi_{Nn} \end{Bmatrix} \equiv \frac{1}{\hat{v}_{kn}} \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \cdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix}$$

振型矩阵：

$$[\Phi] = [\{\phi_1\},\ \{\phi_2\},\ \{\phi_3\},\ \cdots,\ \{\phi_N\}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2N} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \phi_{N3} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

2.6 振型正交性质

基本性质：$\{\phi_m\}^T[M]\{\phi_n\}=0 \quad (m\neq n)$

$$\{\phi_m\}^T[K]\{\phi_n\}=0 \quad (m\neq n)$$

附加性质：$\{\phi_m\}^T[M]\left([M]^{-1}[K]\right)^b\{\phi_n\}=0 \quad (m\neq n)$

质量矩阵归一化：

令：$\{\hat{\phi}_n\}^T[M]\{\hat{\phi}_n\}=1$

得：$\{\hat{v}_n\}^T[M]\{\hat{v}_n\}=\hat{M}_n$

则：$\{\hat{\phi}_n\}=\{\hat{v}_n\}\cdot\hat{M}_n^{-1/2}$

$$[\hat{\Phi}]^T[M][\hat{\Phi}]=[I]$$

3.多自由度系统中的叠加方法

3.1正规坐标(Normal Coordinates)

N维系统
- N维位移矢量$\{v\}$
- N维振型函数$\{\phi\}$——Fourier展开式

位移表达式：$\{v\}=[\Phi]\{Y\}=\{\phi_1\}Y_1+\{\phi_2\}Y_2+\cdots+\{\phi_N\}Y_N=\sum_{n=1}^{N}\{\phi_n\}Y_n$

正规坐标：$Y_n=\dfrac{\{\phi_n\}^T[M]\{v\}}{\{\phi_n\}^T[M]\{\phi_n\}}$，$\dot{Y}_n=\dfrac{\{\phi_n\}^T[M]\{\dot{v}(t)\}}{\{\phi_n\}^T[M]\{\phi_n\}}$

正规坐标表示优点：

1. $\{\phi_n\}$的正交性使得求解方便
2. 可以采用部分$\{\phi_n\}$足够精度描述N维系统

3.2 无阻尼系统（解耦方程）

振动方程：$[M]\{\ddot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{p(t)\}$

令：$\{\ddot{v}(t)\}=[\Phi]\{\ddot{Y}\}$

得：$[M][\Phi]\{\ddot{Y}(t)\}+[K][\Phi]\{Y(t)\}=\{p(t)\}$

等式两边左乘$\{\phi_n\}^T$可得：

$$\{\phi_n\}^T[M][\Phi]\{\ddot{Y}(t)\}=\{\phi_n\}^T[M][\phi_n]\{\ddot{Y}(t)\}=M_n\{\ddot{Y}(t)\}$$

$$\{\phi_n\}^T[K][\Phi]\{Y(t)\}=\{\phi_n\}^T[K][\phi_n]\{Y(t)\}=K_n\{Y(t)\}$$

$$\{\phi_n\}^T\{p(t)\}=P_n(t)$$

正规坐标方程：$\ddot{Y}_n(t)+\omega^2Y_n(t)=\dfrac{P_n(t)}{M_n}\quad\left(\omega_n^2=\dfrac{K_n}{M_n}\right)$

广义参数：M_n，K_n，P_n

3.3 粘滞阻尼系统（解耦方程）

振动方程： $[M]\{\ddot{v}(t)\}+[C]\{\dot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{p(t)\}$

广义参数： $C_n=\{\phi_n\}^T[c]\{\phi_n\}$

$$\{\phi_n\}^T[C]\{\phi_m\}=0 \quad (m\neq n)$$

$$M_n,\ K_n,\ P_n$$

正规坐标方程： $\ddot{Y}_n(t)+2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n(t)+\omega_n^2Y_n(t)=\dfrac{P_n(t)}{M_n}$

阻尼比： $\xi_n=\dfrac{C_n}{2\omega M_n}$

3.4 正规坐标响应分析

时域方法——Duhamel积分公式

$$Y_n(t)=\int_0^t P_n(\tau)h_n(t-\tau)d\tau$$

$$h_n(t-\tau)=\frac{1}{M_n\omega_{Dn}}\sin\omega_{Dn}(t-\tau)\exp\left[-\xi_n\omega_n(t-\tau)\right]d\tau$$

频域方法——Fourier变换公式

$$Y_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(i\varpi)P_n(i\varpi)\exp(i\varpi t)d\varpi$$

$$H_n(i\varpi)=\frac{1}{\omega_n^2 M_n}\left[\frac{1}{\left(1-\beta_n^2\right)+i\left(2\xi_n\beta_n\right)}\right]$$

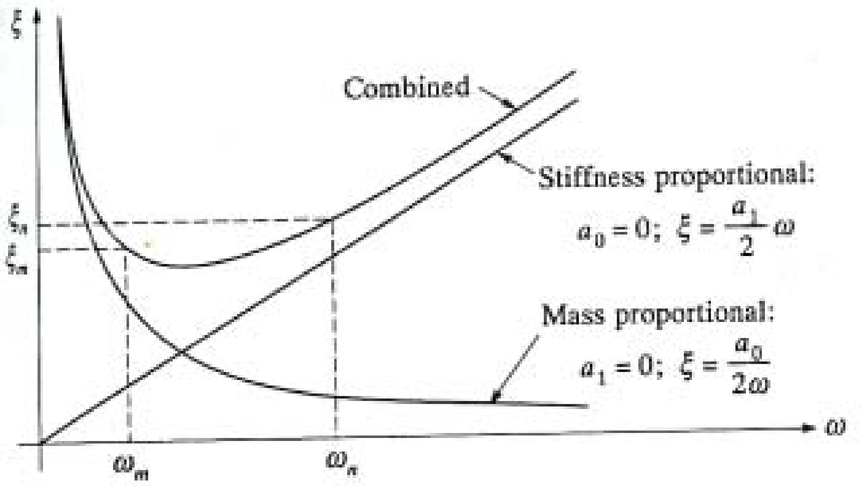
$$P_n(i\varpi)=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(t)\exp(-i\varpi t)dt$$

3.5 线性粘滞阻尼矩阵

瑞利阻尼(Rayleigh Damping)：

$$[C]=a_0[M]+a_1[K]$$

$$\xi_n=\frac{a_0}{2\omega_n}+\frac{a_1\omega_n}{2}$$



$$\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\end{Bmatrix}=2\frac{\omega_m\omega_n}{\omega_n^2-\omega_m^2}\begin{bmatrix}\omega_n & -\omega_m\\-1/\omega_n & -1/\omega_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\xi_m\\\xi_n\end{Bmatrix}$$

广义瑞利阻尼：$[C]=[m]\sum\{a_b\}\left([M]^{-1}[K]\right)^b$

3.6 耦合振动方程求解法(非粘滞阻尼)

(1) 时域方法

Dirac delta函数：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0,\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

单个荷载作用：

$$v_{ij}(t)=\int_0^t p_j(\tau)h_{ij}(t-\tau)d\tau$$

j — 表示荷载作用

全部荷载作用：

$$v_i(t)=\sum_{j=1}^{N}\left[\int_0^t p_j(\tau)h_{ij}(t-\tau)d\tau\right]$$

i — 表示结构节点

(2) 频域方法

动力荷载Fourier变换：

$$P_j(i\overline{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(t)\exp(-i\overline{\omega}t)dt$$

单个荷载作用：

$$v_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(i\overline{\omega})P_j(i\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)d\overline{\omega}$$

全部荷载作用：

$$v_i(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_{ij}(i\overline{\omega})P_j(i\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)d\overline{\omega}\right]$$

4. 多自由度系统中的分步方法

4.1 增量平衡方程

平衡方程： $\{\Delta f_I\}+\{\Delta f_D\}+\{\Delta f_S\}=\{\Delta p\}$

$$\{\Delta f_I\}=\{f_{I_1}\}-\{f_{I_0}\}=[M]\{\Delta\ddot{v}\}$$

$$\{\Delta f_D\}=\{f_{D_1}\}-\{f_{D_0}\}=[C_0]\{\Delta\dot{v}\}$$

$$\{\Delta f_S\}=\{f_{S_1}\}-\{f_{S_0}\}=[K_0]\{\Delta v\}$$

$$\{\Delta p\}=\{p_1\}-\{p_0\}$$

刚度和阻尼系数： $k_{ij0}=\left(\dfrac{df_{S_i}}{dv_j}\right)_0$ ， $c_{ij0}=\left(\dfrac{df_{D_i}}{d\dot{v}_j}\right)_0$

增量平衡方程： $[M]\{\Delta\ddot{v}\}+[C_0]\{\Delta\dot{v}\}+[K_0]\{\Delta v\}=\{\Delta p\}$

4.2 匀加速度方法

伪静力平衡方程：$\left[\tilde{K}_c\right]\{\Delta v\}=\{\Delta\tilde{p}_c\}$

$$\left[\tilde{K}_c\right]=[K_0]+\frac{2}{h}[C_0]+\frac{4}{h^2}[M]$$

$$\{\Delta\tilde{p}_c\}=\{\Delta p\}+2[C_0]\{\dot{v}_0\}+[M]\left(\frac{4}{h}\{\dot{v}_0\}+2\{\ddot{v}_0\}\right)$$

计算步骤：①计算初始$\left[\tilde{K}_c\right]$和$[\Delta\tilde{p}]$

②采用高斯分解法求解$\{\Delta v\}$

③计算响应速度$\{\Delta\dot{v}\}=\frac{2}{h}\{\Delta v\}-2\{\dot{v}_0\}$

④计算初始加速度$\{\ddot{v}_0\}=[M]^{-1}\left(\{p_0\}-\{f_{D_0}\}-\{f_{S_0}\}\right)$

注意问题：①线性系统$\left[\tilde{K}_c\right]$不变，非线性系统$\left[\tilde{K}_c\right]$计算量很大

②$[M]^{-1}$矩阵必须事先计算并保存好

③$\{\Delta\tilde{p}_c\}$即使是线性系统每个步长也要重新计算

4.3 线加速度方法

伪静力平衡方程：

$$[\tilde{K}_d]\{\Delta v\}=\{\Delta \tilde{p}_d\}$$

$$[\tilde{K}_d]=[K_0]+\frac{3}{h}[C_0]+\frac{6}{h^2}[M]$$

$$\{\Delta \tilde{p}_d\}=\{\Delta p\}+[C_0]\left(3\{\dot{v}_0\}+\frac{h}{2}\{\ddot{v}_0\}\right)\{\dot{v}_0\}+[M]\left(\frac{6}{h}\{\dot{v}_0\}+3\{\ddot{v}_0\}\right)$$

计算步骤：①计算初始$[\tilde{K}_d]$和$[\Delta \tilde{p}]$

②采用高斯分解法求解$\{\Delta v\}$

③计算响应速度$\{\Delta \dot{v}\}=\frac{3}{h}\{\Delta v\}-3\{\dot{v}_0\}-\frac{h}{2}\{\ddot{v}_0\}$

④计算初始加速度$\{\ddot{v}_0\}=[M]^{-1}\left(\{p_0\}-\{f_{D_0}\}-\{f_{S_0}\}\right)$

小 结

MDOF动力学方程——节点平衡方程
- 节点弹性力
- 节点阻尼力
- 节点惯性力

MDOF叠加方法
- 解耦方程求解
  - 时域方法
  - 频域方法
- 耦合方程求解
  - Duhamel直接积分
  - Fourier直接变换

MDOF分步方法
- 匀加速度法
- 线加速度法

计算步骤
- ①计算初始$[\tilde{K}]$和$[\Delta\tilde{p}]$
- ②$[\tilde{K}]\{\Delta v\}=\{\Delta\tilde{p}_c\}$求解$\{\Delta$
- ③计算响应速度
- ④计算初始加速度

下周同一时间再见!