同济大学土木工程防灾国家重点实验室、桥梁工程系

# 高等结构动力学

## ——之第六讲

## 特征值问题求解方法

主讲教师：葛耀君 教授、博士

# 1.特征方程法(Characteristic Equation Method)

## 1.1 特征方程一般形式

$$([A]-\lambda[I])\{q\}=\{0\}$$

## 1.2 特征方程行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

对于任意$n\times n$阶矩阵$[A]$成立特征方程

# 1.特征方程法 (续)

## 1.3 特征值多项式

$$\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots C_1\lambda + C_0 = 0$$

## 1.4 特征方程法特点

- 有助于理解特征值数物意义
- $n$次多项式系数的计算工作量为$n^4$
- 特征值确定后,特征矢量的确定仍然很复杂
- 并不是一种求解特征值的一般方法
- 适用$n \le 3$的低阶情况

# 2.相似变换法(Similarity Transformation Method)

## 2.1 相似变换原理

➢矩阵相似变换：

$$[\bar{A}]=[N]^{-1}[A][N]$$

$[A]$— $n\times n$阶矩阵

$[N]$— $n\times n$阶非奇异矩阵

$[\bar{A}]$— 矩阵$[A]$的相似矩阵

➢相似变换特点

(1) 没有重根的矩阵$[A]$一定可以通过相似变换对角化

(2) 对称矩阵$[A]$特征值是实数

(3) 非对称矩阵$[A]$的特征值是复数

# 2.相似变换法(续)

## 2.2 相似变换法分类

(1) Jacobi对角化方法(Jacobi Diagonalization)

- 1954年以前唯一的相似变换法
- 严格按照相似变换关系计算出矩阵$[N]$的元素
- 通过相似变换使矩阵$[\overline{A}]$为对角矩阵

(2) Givens 三对角化方法(Givens Tridiagonalization)

- 通过相似变换使矩阵$[\overline{A}]$为三对角元素矩阵
- 相似变换公式 :$[\overline{A}]=[N]^{-1}[A][N]$

## 2.2 相似变换法分类(续)

(3) Householder三对角化方法(Householder Transformation

- 通过相似变换使矩阵$[\overline{A}]$为三对角元素矩阵
- 对称矩阵： $[\overline{A}]=[L][A][L]^T$
- 非对称矩阵： $[\overline{A}]=[L][A][R]$
- $[L]$—左下三角矩阵 ;$[R]$—右上三角矩阵
- 改进特点：不必求逆运算

(4) Hessenberg上三对角化方法(Upper Hessenberg Form)

- 通过相似变换使矩阵$[\overline{A}]$为上三角元素矩阵
- 相似变换公式 :$[\overline{A}]=[N]^{-1}[A][N]$

## 2.2 相似变换法分类(续)

(5) LR变换法(LR Transformation Method)

- 通过相似变换使矩阵$[\overline{A}]$为上三角元素矩阵
- 相似变换公式：$[\overline{A}]=[L][A][R]$
- 改进特点：不必求逆运算

(6) QR或QL变换法(QR or QL Transformation Method)

- 每次相似变换使矩阵$[\overline{A}]$右下角4元素分离，即

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1,n-2} & 0 & 0 \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2,n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_{n-2,1} & \overline{a}_{n-2,2} & \cdots & \overline{a}_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{n-1,n-1} & \overline{a}_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{n,n-1} & \overline{a}_{n,n} \end{bmatrix}$$

## (6) QR或QL变换法(续)

◆QR变换步骤：

$$\left[A^{(1)}\right]=[A]$$

$$\left[A^{(3)}\right]=\left[Q^{(2)}\right]^T\left[Q^{(1)}\right]^T\left[A^{(1)}\right]\left[Q^{(1)}\right]\left[Q^{(2)}\right]$$

$$\left[A^{(k+2)}\right]=\left[Q^{(k+1)}\right]^T\left[Q^{(k)}\right]^T\left[A^{(1)}\right]\left[Q^{(k)}\right]\left[Q^{(k+1)}\right]$$

令：$[W]=\left[Q^{(k)}\right]\left[Q^{(k+1)}\right]$

$$[R]=\left(\left[A^{(k)}\right]-\xi^{(k)}[I]\right)\left(\left[A^{(k)}\right]-\xi^{(k+1)}[I]\right)$$

$$[W]^T[R]=\left[Q^{(k+1)}\right]^T\left[Q^{(k)}\right]^T\left(\left[A^{(k)}\right]-\xi^{(k)}[I]\right)\left(\left[A^{(k)}\right]-\xi^{(k+1)}[I]\right)=[\Delta]$$

$[\Delta]$—上三角矩阵

## (7) QZ变换法(QZ Transformation Method)

# 3.矢量迭代法(Vector Iteration—Stodola Method)

## 3.1 一阶振型迭代

- 振动方程变换

$$\{\hat{v}\} = \omega^2 [K]^{-1} [M] \{\hat{v}\} = \omega^2 [D] \{\hat{v}\}$$

$[D] = [K]^{-1} [M]$—动力矩阵(Dynamic Matrix)

- 一阶振型初值$\{v_1^{(0)}\}$选取——单位列矢量
- 一阶振型一次近似值

$$\{v_1^{(1)}\} = \omega_1^2 [D] \{v_1^{(0)}\}$$

- 忽略频率影响后的一次近似值

$$\{\overline{v}_1^{(1)}\} = [D] \{v_1^{(0)}\}$$

# 3.1 一阶振型迭代 (续)

- 一次近似值标准化

$$\left\{v_1^{(1)}\right\} = \frac{\left\{\bar{v}_1^{(1)}\right\}}{ref\left(\left\{\bar{v}_1^{(1)}\right\}\right)}$$

最精确的方法：$ref\left(\left\{\bar{v}_1^{(1)}\right\}\right) = \max\left(\left\{\bar{v}_1^{(1)}\right\}\right)$

- 一阶频率一次近似值

$$\left\{v_1^{(1)}\right\} = \omega_1^2\left\{\bar{v}_1^{(1)}\right\} \approx \left\{v_1^{(0)}\right\}, \quad \omega_1^2 \approx \frac{v_{k1}^{(0)}}{\bar{v}_{k1}^{(1)}}$$

$v_{k1}^{(0)}$和$\bar{v}_{k1}^{(1)}$ — $\left\{v_1^{(0)}\right\}$和$\left\{\bar{v}_1^{(1)}\right\}$中的任意第$k$个元素

$$\left(\frac{v_{k1}^{(0)}}{\bar{v}_{k1}^{(1)}}\right)_{\min} < \omega_1^2 < \left(\frac{v_{k1}^{(0)}}{\bar{v}_{k1}^{(1)}}\right)_{\max}$$

# 3.1 一阶振型迭代 (续)

- 质量加权平均近似值

$$\omega_1^2 \doteq \frac{\left\{\overline{v}_1^{(1)}\right\}^T [M]\left\{v_1^{(0)}\right\}}{\left\{\overline{v}_1^{(1)}\right\}^T [M]\left\{\overline{v}_1^{(1)}\right\}}$$

- 一阶振型s次近似值

$$\left\{\overline{v}_1^{(s)}\right\} = \frac{1}{\omega^2}\left\{v_1^{(s-1)}\right\} \approx \frac{1}{\omega_1^2}\left\{\phi_1\right\}$$

- 一阶频率s次近似值

$$\omega_1^2 \approx \frac{\max\left(\left\{v_1^{(s-1)}\right\}\right)}{\max\left(\left\{\overline{v}_1^{(s)}\right\}\right)} = \frac{1}{\max\left(\left\{\overline{v}_1^{(s)}\right\}\right)}$$

# 3.矢量迭代法(续)

## 3.2 二阶振型迭代

- 位移响应展开式

$$\left\{v^{(s)}\right\}=\{\phi_1\}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{2s}Y_1^{(0)}+\{\phi_2\}\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^{2s}Y_2^{(0)}+\{\phi_3\}\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^{2s}Y_3^{(0)}+\cdots$$

- 迭代条件分析

若 $Y_1^{(0)}=0,\ \left\{v^{(s)}\right\}\to\{\phi_2\}$

若 $Y_1^{(0)}=Y_2^{(0)}=0,\ \left\{v^{(s)}\right\}\to\{\phi_3\}$

- 二阶振型迭代初值方程

$$\left\{v_2^{(0)}\right\}=[\Phi]\left\{Y^{(0)}\right\}$$

等式两边左乘 $\{\phi_1\}^T[M]$，可得

$$\{\phi_1\}^T[M]\left\{v_2^{(0)}\right\}=\{\phi_1\}^T[M]\{\phi_1\}Y_1^{(0)}+\{\phi_1\}^T[M]\{\phi_2\}Y_2^{(0)}+\cdots$$

# 3.2 二阶振型迭代(续)

- 一阶振型放大系数

$$Y_1^{(0)} = \frac{\{\phi_1\}^T [M] \{v_2^{(0)}\}}{M_1}$$

- 二阶振型纯化结果

$$\{\tilde{v}_2^{(0)}\} = \{v_2^{(0)}\} - \{\phi_1\} Y_1^{(0)} = \{v_2^{(0)}\} - \frac{1}{M_1}\{\phi_1\}\{\phi_1\}^T [M] \{v_2^{(0)}\}$$

- 筛选矩阵

$$[S_1] = [I] - \frac{1}{M_1}\{\phi_1\}\{\phi_1\}^T [M]$$

$$\{\tilde{v}_2^{(0)}\} = [S_1]\{v_2^{(0)}\}$$

# 3.2 二阶振型迭代(续)

- 二阶振型一次近似值

$$\left\{\tilde{v}_2^{(1)}\right\} = \omega_2^2 [D]\left\{\tilde{v}_2^{(0)}\right\}$$

$$= \omega_2^2 [D][S_1]\left\{v_2^{(0)}\right\}$$

$$= \omega_2^2 [D_2]\left\{v_2^{(0)}\right\}$$

$[D_2] = [D][S_1]$——去除一阶振型影响的动力矩阵

- 质量加权平均近似值：

$$\omega_2^2 \doteq \frac{\left\{\tilde{v}_2^{(1)}\right\}^T [M]\left\{v_2^{(0)}\right\}}{\left\{\tilde{v}_2^{(1)}\right\}^T [M]\left\{\tilde{v}_2^{(1)}\right\}}$$

$$\left\{\tilde{v}_2^{(1)}\right\} = [D_2]\left\{v_2^{(0)}\right\}$$

# 3.矢量迭代法(续)

## 3.3 三阶和更高阶振型迭代

- 基本原理

构造动力矩阵去除前几阶振型影响

- 矢量迭代法限制条件

(1) 在迭代求解第i阶振型前，必须先精确计算前i-1阶振型

(2) 每阶振型迭代都必须具有很高的精度

(3) 根据现有计算机运算精度可以精确迭代前10阶振型

# 3.矢量迭代法(续)

## 3.4矢量迭代法推广

- 子空间迭代法(Subspace Iteration)

  适用于对称矩阵的实数特征值问题

- 同时迭代法(Simultaneous Iteration Method)

  适用于对称和不对称矩阵的复数特征值问题

- Lanczos迭代法(Lanczos Iteration Method)

  适用于对称和不对称矩阵的复数特征值问题

# 4. Sturm 排序法(Sturm Sequence Method)

是一种近似的计算方法

## 参考文献：


[1] J.H.Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1978.

[2] A.Jennings, J.J.McKeown, Matrix Computation, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1992.

[3] J.G.S.Francis, The QR transformation–A unity analogue to the LR transformation, Computer Journal, 4(1961), 265-271; 5(1962), 332-345.

# 小 结

特征值求解

特征方程法—精确方法、求全部特征值、适用于低阶矩阵

相似变换法—精确方法、求全部特征值、适用于高阶矩阵

矢量迭代法—近似方法、求部分特征值、适用于高阶矩阵

Sturm排序法—近似方法、求部分特征值、适用于高阶矩阵

# 下周同一时间再见!