高 等 结 构 动 力 学

——之第七讲

结构随机振动基础

主讲教师：葛耀君 教授、博士

1.结构随机振动概述

1.1工程实例

- 高层建筑风致振动
- 建筑结构的地震运动影响
- 钻井平台的波浪振动
- 飞行中飞机结构振动
- 公路桥梁车辆振动

桥梁结构随机振动 {
- 地震振动
- 车辆振动
- 风致振动

1.结构随机振动概述(续)

1.2 随机作用荷载

- 主要形式：风、地震、波浪、机械振动、车辆行驶
- 主要特点：
  - 周期性、几乎周期性、过渡的
  - 平稳的、非平稳的
  - 线性的、非线性的
  - 微小的、灾难性的
  - 连续的、间断的
  - 局部的、整体的

1.结构随机振动概述(续)

1.3基础知识

- 谱分析概念
- 周期函数
- 布朗运动的爱因斯坦理论
- 湍流理论
- 结构设计
- 相关性理论
- 随机过程理论

2.随机变量基础

2.1 随机变量的概率特性

- 概率定义：设有随机变量 $X(\omega)$ $,\omega\in\Omega,$ 对于任意实数 x，一定存在概率 $\Pr ob[\omega: X(\omega)\leq x]$，简记作 $\Pr ob[\omega: X\leq x]$

- 分布函数：$F(x)=\Pr ob[X\leq x]$

$$dF(x)=\Pr ob[X\leq x+dx]-\Pr ob[X\leq x]$$

$$=F(x+dx)-F(x)$$

$$F(-\infty)=0\ ;\quad F(+\infty)=1$$

- 密度函数：$p(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\{\Pr ob[x\leq X\leq x+\Delta x]/\Delta x\}=\dfrac{dF(x)}{dx}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(z)dz \qquad p(z)\geq 0 \ \text{(非负性)}$$

2.1 随机变量的概率特性(续)

- 离散变量： $x = x_1, x_2, \cdots, x_N$

  概率函数： $P(x) = \Pr ob[X = x]$

  分布函数： $F(x) = \sum_k P(x_k) \quad for \quad x_k \le x$

  密度函数： $p(x) = \sum_k P(x_k)\delta(x - x_k)$

$$\delta(x - x_k) = \begin{cases} \infty & x = x_k \\ 0 & x \ne x_k \end{cases}$$

- 联合分布：

$$F(x, y) = \Pr ob[X \le x, y(t) \le y]$$

当x与y相互独立时：

$$p(x, y) = p(x)p(y) \quad , \quad F(x, y) = F(x)F(y)$$

2.1 随机变量的概率特性(续)

- 部份分布：$F(x)=\Pr ob[X\le x, y(t)<\infty]=\Pr ob[X\le x]$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p(z,y)dzdy=\int_{-\infty}^{x} p(z)dz$$

$$p(x)=\frac{\partial F(x,\infty)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy$$

- 变量变换：令$P(x)$是x的密度函数

若$y=f(x)$,则$p(y)=p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=p(x)\left|\frac{1}{f^{'}(x)}\right|$

令$x=\phi_1(r,s)$和$y=\phi_2(r,s)$, $p(x,y)$是x和y的密度函数

$$p(r,s)=p(x,y)\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=p(x,y)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}$$

2.随机变量基础(续)

2.2 随机变量的统计特性

- 均值：

$$a_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- n阶原点矩：

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx = \sum_{k=1}^{N} x_k^n P(x_k)$$

$$m_0 = 1,\quad m_1 = a_x,\quad m_2 = \sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{N}(x_k - a_k)^2/(N-1)$$

σ —标准差(standard deviation)

$\delta = \dfrac{\sigma_x}{a_x}$ —离差系数(coefficient of variation)

- n阶中心矩：

$$\mu_n = E\left[(x-a_x)^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a_x)^n p(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(x_k - a_x)^n P(x_k)$$

$$\mu_0 = 1,\quad \mu_1 = a_x,\quad \mu_2 = \sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{N}(x_k - a_x)^2/N$$

σ_x —方差(variance)

2.2 随机变量的统计特性(续)

- 特征函数：$M(\theta)=E\left[e^{i\theta x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}p(x)dx$

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}M(\theta)e^{-i\theta x}dx$$

$$m_n=(i)^{-1}\frac{d^nM}{dx^n}\bigg|_{\theta=0}$$

$$\mu_n=(i)^{-1}\frac{d^n(\log_\theta M)}{dx^n}\bigg|_{\theta=0}$$

$$M(\theta)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(k!)^{-1}\cdot(i\theta)^k\cdot E\left[x^k\right]$$

- 高斯分布：$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$

$$M(\theta)=\exp\left(ia\theta-\sigma^2\theta^2/2\right)$$

2.随机变量基础(续)

2.3 随机变量的概率分布

- 二项式分布(伯努利试验)：

  Binomial Distribution (Bernoulli Trials)

$$\Pr ob(x=m)=\frac{n\,!}{m\,!(n-m)!}p^{m}(1-p)^{n-m}\quad (m=0,1,\cdots,n)$$

$$a_x = np$$

$$\sigma_x^2 = np(1-p)$$

- 泊松分布(Poisson Distribution)

二项式分布中取$n\to\infty$和$p\to 0$,且定义$np=\lambda$

$$\Pr ob(x=m)=\frac{\lambda^m}{m\,!}e^{-\lambda}$$

$$a_x = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = \lambda$$

2.3 随机变量的概率分布(续)

➢均匀分布(Uniform Distribution)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$a_x=\frac{1}{2}(b+a)$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

2.3 随机变量的概率分布(续)

➢高斯分布(Gaussion or Normal Distribution)

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

令： $z=\dfrac{x-a_x}{\sigma_x}$ $\quad p(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{2}\right)$

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[1+erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]\Big/2$$

$$erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}\exp\left(-t^2\right)dt \quad (Error \quad Function)$$

$$p(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^4}\,2\pi}\exp\left[-\frac{\sigma_y^2x^2-2\sigma_{xy}^2xy+\sigma_x^2y^2}{2\left(\sigma_x^2\sigma_y^2-\sigma_{xy}^4\right)}\right]$$

➢对数正态分布(Log-normal Distribution)

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln x-a_x)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (x>0)$$

2.3 随机变量的概率分布(续)

瑞利分布(Rayleigh Distribution)

$$p(x)=\frac{x}{s^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2s^2}\right]\quad (x\geq 0),\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(z)dz=\exp\left[-\frac{x^2}{2s^2}\right]$$

$$a_x=s\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1.253s,\qquad \sigma_x=s\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}=0.6551s$$

韦伯分布(Weibull Distribution)

$$p(x)=\frac{k}{c}\left(\frac{x}{c}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{c}\right)^k\right],\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(z)dz=\exp\left[-\left(\frac{x}{c}\right)^k\right]$$

$$a_x=c\Gamma\left[1-\frac{1}{k}\right],\qquad \sigma_x=c\sqrt{\Gamma\left[1+\frac{2}{k}\right]-\Gamma^2\left[1+\frac{1}{k}\right]}$$

$$\Gamma[z]=\int_0^{\infty}\exp(-x)x^{z-1}dx\quad (Gamma\text{函数})$$

3.随机过程基础

3.1 随机过程形式：$x(t,s)$

- 一个时间函数族(t与s都是变量)
- 一个确定的时间函数(t为变量，而s是固定的)
- 一个确定的值(t与s都是固定的)

3.2 统计特性

- n阶分布函数:

对于$t\in T$的$\{t_1,t_2,\cdots t_n\}$和随机变量集合$\{x(t_1),x(t_2),\cdots x(t_n)\}$

$$F_{x_1x_2\cdots x_n}(X_1,X_2,\cdots X_n)=P\{x_1\le X_1\cap x_2\le X_2\cap\cdots\cap x_n\le X_n\}$$

- n阶密度函数:

$$f_{x_1x_2\cdots x_n}(X_1,X_2,\cdots X_n)=\frac{\partial^n F_{x_1x_2\cdots x_n}(X_1,X_2,\cdots X_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

3.2 统计特性(续)

➢随机过程均值

$$m_x(t)=E[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)f_x(x)dx$$

➢随机过程方差

$$E[x^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)f_x(x)dx$$

$$\sigma_x^2(t)=E\{[x(t)-m_x(t)]^2\}=E[x(t)^2]-m_x^2(t)$$

➢相关函数

$$R_x[x(t_1),x(t_2)]=E\{x(t_1)x(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)x(t_2)f_{x_1x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

➢协方差函数

$$\Gamma_x[x(t_1),x(t_2)]=E\{[x(t_1)-m_x(t_1)][x(t_2)-m_x(t_2)]\}$$

$$=R_x[x(t_1),x(t_2)]-m_x(t_1)m_x(t_2)$$

3.随机过程基础(续)

3.3 随机过程分类

(1) 按取值分类

- 离散参数的离散随机过程
- 离散参数的连续随机过程
- 连续参数的离散随机过程
- 连续参数的连续随机过程

(2) 按统计特性分类

- 平稳随机过程

$$F_n\{x(t_1),x(t_2),\cdots x(t_n)\}=F_n\{x(t_1+\tau),x(t_2+\tau),\cdots x(t_n+\tau)\}$$

- 广义随机过程

$$m_x(t)=const \quad , \quad E[x(t_1)x(t_1+\tau)]=R(\tau)$$

- 非平稳随机过程

3.3 随机过程分类(续)

(3) 按记忆特性分类

- 白噪声过程(white Noise)

白光在电磁波的整个可见范围内其功率谱密度为常数

功率谱密度： $S_n(\omega)=S_0 \qquad -\infty<\omega<\infty$

相关函数： $R_n(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau)$

均值： $E[x_n(t)]=0$

方差： $\sigma_n^2=R_n(0)=\infty$

应用： 地震、风荷载和波浪

(3) 按记忆特性分类(续)

◆马尔可夫过程(Markov)

数学定义：$F\left(x_n,t_n \middle| x_{n-1},t_{n-1},x_{n-2},t_{n-2},\cdots,x_1,t_1\right)=F_n\left(x_n,t_n \middle| x_{n-1},t_{n-1}\right)$

物理意义：高阶概率分布函数可用二阶分布函数表示

实际应用：随机荷载白噪声→结构位移和速度是马尔可夫

◆泊松过程(Poisson)

$\Delta x(t_1,t_2)=x(t_2)-x(t_1)$独立增量过程的整数形式

一般形式：$P_N(n,t)=\dfrac{1}{n\,!}\left[\int_0^t\lambda(\tau)d\tau\right]^n\exp\left[-\int_0^t\lambda(\tau)d\tau\right]$

平稳形式：$P_N(n,t)=\dfrac{(\lambda_0 t)^n}{n\,!}$

◆高斯过程(Gaussian)

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Gamma_x|}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\overline{X}-M)^T\Gamma_x^{-1}(\overline{X}-M)\right]$$

小 结

- 随机振动概述
  - 工程实例
  - 随机作用荷载
  - 基础知识
- 随机变量基础
  - 概率特性
  - 统计特性
  - 概率分布
- 随机过程基础
  - 随机过程形式
  - 随机过程统计特性
  - 随机过程分类—取值、统计特性、记忆

下周同一时间再见!